Calculabilité / Complexité (L3)
Devoir à la maison décembre 2016
à rendre au plus tard le 19 décembre à 8h30

Exercice 1 : UNIQ_SAT

Le problème UNIQ_SAT est une variante de 3_SAT. On rappelle que 3_SAT considère des formules propositionnelles en forme normale conjonctive (CNF) telles que chaque clause contient exactement trois littéraux. Une instance a la forme $\psi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$, où chaque clause C_i est de la forme $l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3}$ et où chaque littéral $l_{i,j}$ est soit une variable propositionnelle $p \in \mathit{Prop} = \{p, q, r, \ldots\}$, soit sa négation $\neg p$. On notera $l_{i,j} = \epsilon_{i,j} p_{i,j}$ avec $\epsilon_{i,j} \in \{+, -\}$.

Alors que 3_SAT est le problème de savoir s'il existe une valuation $v : \mathit{Prop} \to \mathit{Bool}$ qui valide ψ, UNIQ_SAT demande s'il existe une valuation qui valide *un et un seul* littéral dans chaque clause.

Question 1. Donnez une instance ψ qui soit positive pour 3_SAT et négative pour UNIQ_SAT. Justifiez.

Question 2. Montrez que UNIQ_SAT est NP–complet. Justifiez la correction de votre réduction. Pour cette question, les seules réductions autorisées partent de problèmes vus en classe.

Exercice 2 : SUBSETSUM

Le problème SUBSETSUM n'a pas été présenté en classe mais il est décrit dans le polycopié du cours. Il vous faut donc étudier les preuves des Propositions 7 et 8 (p. 20 *& seq.* du polycopié) où il est montré que SUBSETSUM est NP–complet quand les nombres $v_1, \ldots, v_n, w$ qui composent une instance sont donnés en binaire, et qu'il est dans P quand ces nombres sont donnés en base 1.

Question 1. On considère une version de SUBSETSUM où l'input consiste en un entier d (la dimension) suivi de vecteurs $v_1, \ldots, v_n, w$ de $\mathbb{N}^d$ et où on doit décider s'il existe un sous ensemble $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $w = \sum_{i \in I} v_i$.

Pour ce problème, dénommé VECSUBSETSUM_unary, la dimension d ainsi que les vecteurs sont donnés en base 1, c.-à-d. que la taille de l'input est en $O\big(d + \sum_{j=1}^{d} w[i] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} v_i[j]\big)$.

Est-ce que ce problème est dans P ou bien est-il NP–difficile ? Justifiez précisément votre réponse.

Problème : chemins dans les graphes pondérés

On considère des graphes pondérés de la forme $G = (V, E, p)$ où les arêtes de $E \subseteq V \times V$ sont orientées et portent chacune un poids, un entier naturel donné par $p : E \to \mathbb{N}$.

On commence par définir ou rappeler quelques notions et notations qui seront utiles dans la suite de l'énoncé et dans vos solutions: Pour une arête $e = (u, v) \in E$, on note ${}^\bullet e$ pour u et $e^\bullet$ pour v. Un *chemin de longueur ℓ dans G* est un mot $\rho = e_1 \cdots e_\ell \in E^+$ composé de $\ell > 0$ arêtes de E et tel que $e_{i-1}{}^\bullet = {}^\bullet e_i$ pour tout $i = 2, \ldots, \ell$. Si $\rho = e_1 \cdots e_\ell$ est un chemin, les notations ${}^\bullet\rho$ et $\rho^\bullet$ désignent ${}^\bullet e_1$ et $e_\ell{}^\bullet$ respectivement. Le poids $p(\rho)$ d'un chemin est la somme $\sum_{i=1}^{\ell} p(e_i)$ des poids de ses arêtes.

Un chemin $\rho = e_1 \ldots e_\ell \in E^+$ est un *cycle* si $e_l{}^\bullet = {}^\bullet e_1$ et le cycle est *élémentaire* si les sommets ${}^\bullet e_1, \ldots, {}^\bullet e_\ell$ sont tous distincts.

Le problème WEIGHTEDPATH a comme input un graphe pondéré G, deux sommets $u, v \in E$, un poids $a \in \mathbb{N}$. Il s'agit de décider s'il existe dans G un chemin allant de u à v et de poids total a.

Ce problème n'a pas été étudié en classe mais il est montré dans le polycopié du cours qu'il est dans NP (Proposition 10 p. 24, s'appuyant sur le lemme d'Euler).

Question 1. Lisez attentivement dans le polycopié la preuve de l'appartenance à NP. Redonnez, en la détaillant, une preuve que s'il existe un chemin de poids a allant de u à v alors il existe en particulier un tel chemin de longueur au plus $(a + 1)|V|$.

Question 2. On dit qu'un chemin ρ est *factorisé en cycles* si ρ est écrit sous la forme

$$\rho = \rho_0 \sigma_1^{k_1} \rho_1 \sigma_2^{k_2} \cdots \rho_{r-1} \sigma_r^{k_r} \rho_r$$

telle que les facteurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sont des cycles élémentaires, les entiers $k_1, \ldots, k_r$ sont non nuls et les facteurs $\rho_0, \ldots, \rho_r$ n'ont aucun facteur qui soit un cycle. (La notation w^k avec $k \in \mathbb{N}$ dénote la concaténation de k copies de w, avec $w^0 = \epsilon$ et $w^{k+1} = w^k \cdot w$).

Montrez que tout chemin admet une factorisation en cycles.

Question 3. Montrez que si G admet un chemin de poids a allant de s à t alors il existe en particulier un tel chemin avec une factorisation en cycles $\rho_0 \sigma_1^{k_1} \rho_1 \sigma_2^{k_2} \cdots \rho_{r-1} \sigma_r^{k_r} \rho_r$ telle que les σ_i's ont tous des poids différents.

Question 4. On s'intéresse maintenant à des graphes où les poids sont des entiers relatifs. Pour $G = (V, E, p)$ avec $p : E \to \mathbb{Z}$, on notera k le nombre $|V|$ de sommets, m le nombre $|E|$ d'arêtes, et $P = \max_{e \in E} |p(e)|$ le plus grand poids (en valeur absolue). Ainsi la donnée du graphe utilise un espace mémoire en $O(k + m\lceil \log_2(P) \rceil)$.

Donnez un polynôme à quatre variables $Q(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tel que pour toute instance $\langle G, u, v, a \rangle$, si G a un chemin de poids a reliant u à v alors il existe un tel chemin de longueur bornée par $Q(k, m, P, a)$.

Question 5. Quelle est la complexité de WEIGHTEDPATH quand les poids sont des entiers relatifs?