Théorie des Modèles

de l'exemple au modèle

Kaddar Younesse

Travail d'Initiative Personnelle Encadré

Nullstellensatz faible et fort

Problématique et premiers outils

Théorème d'Ax-Grothendieck

Toute fonction polynomiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ qui est injective est surjective.

Premières observations

Pour $n \leftarrow 1$: ~~Injective~~ : Théorème de d'Alembert

$\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{K}$ fini : ~~Polynomiale~~ : Principe des tiroirs

Nullstellensatz faible

Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos (AC), pour tout idéal J de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\mathrm{V}(J) = \emptyset \Longrightarrow J = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$$

où $\quad \mathrm{V}(J) \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{P \in J} P^{-1}(\{0\})$

Il suffit de montrer que :

$$\Phi \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \left\{\text{Idéaux maximaux de } \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]\right\} \\ (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto \left\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \right\rangle \end{cases}$$

est une bijection.

$$\Big\Downarrow \quad \textit{Astuce de Rabinowitsch}$$

Nullstellensatz fort

$\mathbb{K}$ AC : pour tous polynômes $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, l'idéal $J \overset{\text{déf}}{=} \left\langle P_1, \ldots, P_m \right\rangle$ vérifie :

$$\mathrm{I}\left(\mathrm{V}(J)\right) = \sqrt{J}$$

où

- $\mathrm{I}\left(\mathrm{V}(J)\right)$ est l'idéal des polynômes s'annulant en chacun des éléments de $\mathrm{V}(J)$
- $\sqrt{J}$ est le radical de J (l'ensemble des polynômes dont une puissance strictement positive appartient à J)

Astuce de Rabinowitsch

Le Nullstellensatz faible implique le fort !

Soit $J \overset{\text{déf}}{=} \langle P_1, \ldots, P_m \rangle \subset \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.

- $\sqrt{J} \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(J))$: évident, par intégrité de $\mathbb{K}$.
- $\mathbf{I}(\mathbf{V}(J)) \subset \sqrt{J}$: Si $P \in \mathrm{I}(\mathrm{V}(J)) \setminus \{0\}$
  Dans $\mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$:

$$\mathfrak{I} \overset{\text{déf}}{=} \langle 1 - X_0 P,\ P_1, \ldots, P_m \rangle$$

$$\mathrm{V}(\mathfrak{I}) = \emptyset \overset{\text{Nullstellensatz faible}}{\Longrightarrow} \mathfrak{I} = \mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$$

d'où :

$$1 = (1 - X_0 P) \underbrace{Q_0(X_0, \ldots, X_n)}_{\in \mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]} + \sum_{i=1}^{m} P_i \underbrace{Q_i(X_0, \ldots, X_n)}_{\in \mathbb{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]}$$

$$\Big\Downarrow\ X_0 \leftarrow 1/P$$

$$1 = \sum_{i=1}^{m} P_i(X_1, \ldots, X_n)\, Q_i(1/P,\ X_1, \ldots, X_n)$$

soit, pour r assez grand :

$$P^r = \sum_{i=1}^{m} P_i(X_1, \ldots, X_n) \underbrace{\widetilde{Q}_i(X_1, \ldots, X_n)}_{\in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]} \in J$$

Ax-Grothendieck

Plan de la démonstration

Heuristique

Méthode : procéder par l'absurde, en considérant $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ injectif mais non surjectif

1. Le démontrer dans les clôtures algébriques des corps finis
   - Le Nullstellensatz fort $\longrightarrow$ fournit des "témoins" de l'injectivité et de la non surjectivité de P
2. Étendre le résultat à $\mathbb{C}$, en exhibant une clôture algébrique de corps fini où Ax n'est pas vérifié.

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{K}}^n, P(x) - P(y) = 0 \Longrightarrow x - y = 0$$

$$\Big\Downarrow \text{ Nullstellensatz fort } + i\text{-ème coordonnée}$$

$$X_i - Y_i \in \sqrt{\langle P_i(X_1, \dots, X_n) - P_i(Y_1, \dots, Y_n) \rangle}$$

$\Rightarrow$ il existe $Q : \overline{\mathbb{K}}^n \times \overline{\mathbb{K}}^n \to \overline{\mathbb{K}}^n$, $r \in \mathbb{N}^*$ tels que :
$\forall x, y \in \overline{\mathbb{K}}^n, \ \big(P(x) - P(y)\big) Q(x, y) = (x - y)^r$

Ax à l'épreuve de la théorie des modèles

Prélude : Schéma de Vérité de Tarski

Tout commence avec le constat, faussement trivial :

"Il neige" est vrai si, et seulement si il neige.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on se donne des "ensembles de symboles" (dits langages) $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}_{i+1} \supsetneq \mathcal{L}_i$.
On se place sur un $\mathcal{L}_i$-système formel (ex : logique du premier ordre) :

- $\mathcal{L}_i$ est appelé Langage-Objet
- $\mathcal{L}_i$ contient (éventuellement) un prédicat de vérité "vrai$_i$"

Schéma de vérité de Tarski :

Pour tout $\mathcal{L}_i$-énoncé p : p est vrai$_{i+1}$ ssi $I_{i+1}(p)$

où : $I_{i+1}(p)$ est l'interprétation de p dans le $\mathcal{L}_{i+1}$-système formel

Cadre sémantique de la théorie des modèles :

$\mathcal{L}$-structure : Un ensemble $\mathcal{M}$ où on interprète les éléments de $\mathcal{L}$: i.e on choisit

- $c^{\mathcal{M}}$ pour chaque symbole de constante $c \in \mathcal{L}$
- ET $f^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^{n_f} \to \mathcal{M}$ pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{L}$ d'arité n_f
- ET $P^{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}^{n_P}$ pour chaque symbole de prédicat $P \in \mathcal{L}$ d'arité n_P

On interprète, ainsi, les $\mathcal{L}$-formules atomiques closes, puis les $\mathcal{L}$-énoncés de manière "usuelle" à partir des formules atomiques, par induction.

Modèle : $\mathcal{M}$ est un modèle de l'énoncé θ si, et seulement si, θ est vrai dans $\mathcal{M}$: on note $\mathcal{M} \models \theta$

Satisfaisabilité : une théorie $\mathcal{T}$ est dite : satisfaisable si elle admet au moins un modèle, finiment satisfaisable si toute partie finie de $\mathcal{T}$ est satisfaisable.

Conséquence sémantique : on dit qu'un énoncé θ est une conséquence (sémantique) d'une théorie $\mathcal{T}$ si : pour tout modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$, $\mathcal{M} \models \theta$. On le note $\mathcal{T} \models \theta$.

Filtres, Ultrafiltres, et Ultraproduits

Ou comment concrétiser la notion "limite" de modèles

Filtre : un filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble I est une partie de $\mathcal{P}(I)$ vérifiant :

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \mathcal{P}(I),\ Y \supset X \implies Y \in \mathcal{F}$
- $\forall X, Y \in \mathcal{F},\ X \cap Y \in \mathcal{F}$

Ultrafiltre : un filtre maximal (pour l'inclusion).

Ultrafiltres : remarque qualitative

Intuitivement, un ultrafiltre correspond à la donnée des "grandes" parties de I, de telle sorte que toute partie est soit "grande" ($\mathcal{U}$-presque sûre) soit "petite" ($\mathcal{U}$-négligeable) : l'"opposé" de son complémentaire.

Égalité $\mathcal{U}$-presque partout

On définit, sur $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i$, une relation d'équivalence d'"égalité $\mathcal{U}$-presque partout" par : $\forall M, N \in \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i$,

$$M \overset{\mathcal{U}\text{-pp}}{=} N \iff \{i \in I \mid M_i = N_i\} \in \mathcal{U}$$

Ultraproduit : L'ultraproduit $\mathcal{M}^*$ des $\mathcal{M}_i$ $(i \in I)$ par l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est le quotient de $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i$ par la relation d'équivalence $\overset{\mathcal{U}\text{-pp}}{=}$. On le note $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i \Big/ \mathcal{U}$.

Théorème de Łoś

Une formule est vraie dans un ultraproduit si, et seulement si, elle est vraie en presque toutes coordonnées :
Si $\mathcal{M}^* \overset{\text{déf}}{=} \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i \Big/ \mathcal{U}$ est un ultraproduit de $\mathcal{L}$-structures, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule, et $M^* = \left(\overline{M^{(1)}}, \ldots, \overline{M^{(n)}}\right) \in (\mathcal{M}^*)^n$, alors :

$$\mathcal{M}^* \vDash \phi(M^*)$$

$$\Longleftrightarrow \{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \vDash \phi\left(M_i^{(1)}, \ldots, M_i^{(n)}\right) \} \in \mathcal{U}$$

Théorèmes de Compacité et de Transfert

Théorème de Compacité

Une théorie est satisfaisable si et seulement si elle est finiment satisfaisable.

Les $\mathbb{F}_p$ "tendent" vers $\mathbb{C}$

Pour tout $P \subset \mathbb{P}$ infini, et tout ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ sur P :
L'ultraproduit de la famille des clôtures algébriques des $\left(\mathbb{F}_p\right)_{p \in P}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Théorème de Transfert

Toute théorie $\mathcal{T}$ du langage des anneaux est vraie dans $\mathbb{C}$ dès qu'elle est vraie dans les clôtures algébriques des $\mathbb{F}_p$, pour une infinité de nombres premiers p.