2015 - 2016

Oraux

Exercice - 1 : Mines 2015 - Alexandre Martin

1. On considère une urne contenant N boules avec une proportion p de boules noires et une proportion $q=1-p$ de boules blanches. On effectue n tirages sans remise supposés indépendants, et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires tirées à l'issue de ces n tirages.
   (a) Calculer pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$.
   (b) Vérifier que la loi obtenue est bien une loi de probabilité.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X.

Solution.

a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Les éléments de $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ sont obtenus de la manière suivante : sur les n boules tirées de l'urne ($\binom{\mathrm{N}}{n}$ possibilités), k sont noires ($\binom{\mathrm{N}p}{k}$ possibilités), et $n-k$ sont blanches ($\binom{\mathrm{N}q}{n-k}$ possibilités).

En notant $\mathcal{N} \overset{\text{déf}}{=} \{n_i\}_{i\in[\![1,\mathrm{N}p]\!]}$ (resp. $\mathcal{B} \overset{\text{déf}}{=} \{b_j\}_{j\in[\![1,\mathrm{N}q]\!]}$) l'ensemble des boules noires (resp. blanches) : la donnée d'un $\omega \in \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ correspond donc à celle d'un élément de $\mathcal{P}_k(\mathcal{N}) \times \mathcal{P}_{n-k}(\mathcal{B}) \subset \bigcup_{m=0}^{n} \mathcal{P}_m(\mathcal{N}) \times \mathcal{P}_{n-m}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{P}_n(\mathcal{N} \cup \mathcal{B})$, et réciproquement.
Donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\frac{\binom{\mathrm{N}p}{k}\binom{\mathrm{N}q}{n-k}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) &= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\\ &= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \binom{\mathrm{N}p}{k}\binom{\mathrm{N}q}{n-k}\\ &= 1 \qquad \text{(considérer le coefficient de } \mathrm{Y}^n \text{ dans } (\mathrm{Y}+1)^{\mathrm{N}} = (\mathrm{Y}+1)^{\mathrm{N}p}(\mathrm{Y}+1)^{\mathrm{N}q}\text{)}\end{aligned}$$

c) A) **Calcul de $\mathrm{E}(\mathrm{X})$:**

- **Méthode 1 :**

$$\begin{aligned}
\mathrm{E(X)} &= \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P(X}=k) \\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\binom{\mathrm{N}p}{k}\binom{\mathrm{N}q}{n-k} \\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{N}p\binom{\mathrm{N}p-1}{k-1}\binom{\mathrm{N}q}{n-k} \\
&= \frac{\mathrm{N}p}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \binom{\mathrm{N}p-1}{k}\binom{\mathrm{N}q}{n-1-k} \\
&= \frac{\mathrm{N}p\binom{\mathrm{N}-1}{n-1}}{\binom{\mathrm{N}}{n}} && \text{(de même que précédemment)} \\
&= np
\end{aligned}$$

- **Méthode 2 :**
Pour tout $k \in [\![1, \mathrm{N}p]\!]$, en notant A_k l'événement "on a tiré la boule noire n_k" :

$$\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}p} \mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}$$

Les indicatrices $\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}$ ($k \in [\![1, \mathrm{N}p]\!]$) suivent toutes la même loi, puisque les boules noires jouent toutes le même rôle. Donc :

$$\mathrm{E(X)} = \mathrm{N}p \cdot \mathrm{P(A_1)}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(A_1^c)} &= \frac{\binom{\mathrm{N}-1}{n}}{\binom{\mathrm{N}}{n}} && \text{(probabilité de tirer } n \text{ boules dans } \mathcal{B}\cup\mathcal{N}\backslash\{n_1\} \\
& && \text{sachant qu'on en a tiré } n \text{ dans } \mathcal{B}\cup\mathcal{N}) \\
&= \frac{\mathrm{N}-n}{\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{P(A_1)} = \dfrac{n}{\mathrm{N}}$, et :

$$\mathrm{E(X)} = np$$

B) **Calcul de** $\mathrm{Var(X)}$ **:**

- **Méthode 1 :**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathrm{X}) &= \mathrm{E}(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)) + \mathrm{E}(\mathrm{X}) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 \\
&= \frac{1}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=2}^{\mathrm{N}} k(k-1)\binom{\mathrm{N}p}{k}\binom{\mathrm{N}q}{n-k} + np(1-np) \\
&= \frac{\mathrm{N}p}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=2}^{\mathrm{N}} k\binom{\mathrm{N}p-1}{k-1}\binom{\mathrm{N}q}{n-k} + np(1-np) \\
&= \frac{\mathrm{N}p(\mathrm{N}p-1)}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=2}^{\mathrm{N}} \binom{\mathrm{N}p-2}{k-2}\binom{\mathrm{N}q}{n-k} + np(1-np) \\
&= \frac{\mathrm{N}p(\mathrm{N}p-1)}{\binom{\mathrm{N}}{n}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-2} \binom{\mathrm{N}p-2}{k}\binom{\mathrm{N}q}{n-2-k} + np(1-np) \\
&= \frac{\mathrm{N}p(\mathrm{N}p-1)\binom{\mathrm{N}-2}{n-2}}{\binom{\mathrm{N}}{n}} + np(1-np) \\
&= \frac{\mathrm{N}p(\mathrm{N}p-1)n(n-1)}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)} + np(1-np) \\
&= \frac{p(\mathrm{N}p-1)n(n-1)}{(\mathrm{N}-1)} + np(1-np) \\
&= \frac{p(\mathrm{N}p-1)n(n-1) + np(1-np)(\mathrm{N}-1)}{(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{np((\mathrm{N}p-1)(n-1) + (1-np)(\mathrm{N}-1))}{(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{np((\mathrm{N}pn - \mathrm{N}p - n + 1 + \mathrm{N} - 1 - np(\mathrm{N}-1))}{(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{np(-\mathrm{N}p + \mathrm{N} - n + np))}{(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{np(\mathrm{N}-n)q}{(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{npq(\mathrm{N}-n)}{(\mathrm{N}-1)}
\end{aligned}
$$

- **Méthode 2 :**
  Avec les mêmes notations que précédemment, pour tout $k \in [\![1, \mathrm{N}p]\!]$:

$$\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}) = \mathrm{E}\left(\underbrace{\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}^2}_{=\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}}\right) - \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k})^2 = \frac{n}{\mathrm{N}}\left(1 - \frac{n}{\mathrm{N}}\right) = \frac{n(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}^2}$$

  Et pour tout $l \in [\![1, \mathrm{N}p]\!] \backslash \{k\}$:

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}, \mathbb{1}_{\mathrm{A}_l}) = \mathrm{E}\left(\underbrace{\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k} \cdot \mathbb{1}_{\mathrm{A}_l}}_{=\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_l}}\right) - \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k})\,\mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_l}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_l) - \frac{n^2}{\mathrm{N}^2}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{A}_k \cap \mathrm{A}_l) &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_k \mid \mathrm{A}_l)\mathrm{P}(\mathrm{A}_l) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{A}_k \mid \mathrm{A}_l)\frac{n}{\mathrm{N}} \\
&= \frac{n-1}{\mathrm{N}-1}\frac{n}{\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}, \mathbb{1}_{\mathrm{A}_l}) = \frac{n}{\mathrm{N}}\left(\frac{n-1}{\mathrm{N}-1} - \frac{n}{\mathrm{N}}\right) = \frac{n}{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{N}(n-1) - n(\mathrm{N}-1)}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)} = -\frac{n(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}^2(\mathrm{N}-1)}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}p} \mathrm{Var}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}) + \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant \mathrm{N}p} \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}, \mathbb{1}_{\mathrm{A}_l}) \\
&= \mathrm{N}p\frac{n(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}^2} - \mathrm{N}p(\mathrm{N}p-1)\frac{n(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}^2(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{np(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}} - \frac{p(\mathrm{N}p-1)n(\mathrm{N}-n)}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{np((\mathrm{N}-n)(\mathrm{N}-1) - (\mathrm{N}p-1)(\mathrm{N}-n))}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{np(\mathrm{N}-n)\mathrm{N}q}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)} \\
&= \frac{npq(\mathrm{N}-n)}{(\mathrm{N}-1)}
\end{aligned}$$

□