Exercice - 15 - CCP 2015

Y a-t-il des suites $\epsilon \in c^0_{\mathbb{R}}$ décroissantes & telles que

$$\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon_n}}\right)_{n\geqslant 1} \in \ell^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{N}^*)$$

Solution. On note ϵ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \epsilon_n \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } n \leqslant 16 \\ 2\,\dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} & \text{sinon} \end{cases}$

Montrons que ϵ convient, i.e que $u \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{n^{1+\epsilon_n}}\right)_{n\geqslant 1} \in l^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{N}^*)$

— ϵ décroît :
ϵ décroît sur $[\![17, +\infty[$ comme composée de la fonction décroissante $[e, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{ln(x)}{x}$ et de la fonction croissante $[\![17, +\infty[\to [e, +\infty[,\ x \mapsto \ln(x)$.
De plus, $\epsilon_{17} < 1$, d'où ϵ décroît sur $\mathbb{N}^*$.

— ϵ tend vers 0 :
Comme $\ln(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\epsilon_n = \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par composition.

— u est un TG de série absolument convergente :
En effet :

$$\forall n \geqslant 17,\ u_n = \frac{1}{n\ln^2(n)}$$

La fonction $\dfrac{1}{\bullet\ln^2(\bullet)}$ est continue par morceaux, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc : $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\bullet\ln^2(\bullet)}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sont de même nature.

Comme : $\int\limits_1^{\bullet} \dfrac{1}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t = \left[\dfrac{-1}{\ln}\right]_1^{\bullet}$ converge en $+\infty$, $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\bullet\ln^2(\bullet)}$ converge, et, par suite, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ aussi [1].

$\square$

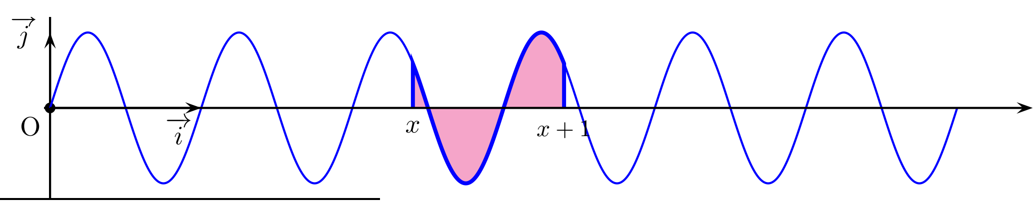
Exercice - 17 : Centrale PSI 2010

$$\Phi \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} C^0(\mathbb{R}) & \to C^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto \Phi(f) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int\limits_x^{x+1} f \end{cases} \end{cases}$$

est-elle injective ? Surjective ?

Solution.

1 Φ n'est pas injective :
Par linéarité de l'intégrale, Φ est linéaire, d'où l'injectivité de Φ équivaut à la trivialité de son noyau.
Or, $0 \neq f \overset{\text{déf}}{=} \sin(2\pi\,\bullet) \in \mathrm{Ker}\Phi$, d'où Φ n'est pas injective.



1. et comme le TG u est positif, l'absolue convergence de la série équivaut à sa convergence

2 Φ n'est pas surjective :

Pour toute fonction f continue, $\int_{\bullet}^{\bullet+1} f = \int_0^{\bullet+1} f - \int_0^{\bullet} f$ est [2] de classe C^1.

Donc si Φ était surjective, toute fonction continue serait de classe C^1, ce qui n'est absolument pas le cas.

$\square$

2. comme somme de fonctions de classe C^1