Exercice - 40 - Centrale 2002

Quel est le sous-groupe de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qu'engendrent les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Solution. On note $(\mathrm{H},+) \overset{\text{déf}}{=} (\langle \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\rangle, +)$ le sous-groupe de $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),+)$ engendré par les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $\mathrm{H} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:

— $\mathrm{H} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est clair.

— $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{H}$:
En effet : Si

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ni \mathrm{A} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & a_2 & & (*') & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (*) & & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

alors, sans perte de généralité [1], si $a_1, a_2, \cdots, a_r$ sont nuls et $a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_n$ sont non nuls :

$$\mathrm{H} = \langle \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\rangle \ni \mathrm{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & (0) & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & (*) & & \frac{a_{r+1}}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{a_n}{2} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \ddots & & & (*') & \vdots \\ \vdots & & -1 & & & \vdots \\ \vdots & (0) & & \frac{a_{r+1}}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a_n}{2} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

□

Exercice - 41 - Centrale 2008

Quel est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qu'engendrent les matrices nilpotentes ?

Solution.
On note $\mathfrak{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de nilpotentes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et on pose $\mathrm{A}_n \overset{\text{déf}}{=} \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0\}$
Montrons que $\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R})\rangle = \mathrm{A}_n$:

— A_n est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:
En effet :
  — $\mathrm{A}_n \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
  — $0 \in \mathrm{A}_n \neq \emptyset$
  — Pour tous $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{A}_n, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \mathrm{Tr}(\alpha \mathrm{M} + \mathrm{N}) = \alpha\,\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) + \mathrm{Tr}(\mathrm{N}) = 0$, d'où : $\alpha \mathrm{M} + \mathrm{N} \in \mathrm{A}_n$

— $\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R})\rangle \subset \mathrm{A}_n$:
Comme A_n est un espace vectoriel, il suffira de montrer que $\mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{A}_n$:

1. une rédaction plus rigoureuse (mais inutilement lourde) consisterait à noter $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ les coefficients diagonaux nuls

— **Méthode 1 :**
Par récurrence sur $n \geqslant 1$: $\mathrm{H}(n)$: "$\forall\, \mathrm{N} \in \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(\mathrm{N}) = 0$" :

- **Initialisation :** $\mathrm{H}(1)$ est claire, puisque la seule matrice nilpotente de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ est (0).
- **Hérédité :** Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{H}(n)$, $\mathrm{N} \in \mathfrak{N}_{n+1}(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à N.
Comme [2] N n'est pas inversible, il existe un vecteur non nul $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
On complète [3] (x) en une base $\mathrm{B} \overset{\text{déf}}{=} (x, x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, et il existe $\mathrm{L} \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{N}' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$\mathcal{M}(u, \mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{L} \\ 0 & \mathrm{N}' \end{pmatrix}$$
Comme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ est nilpotent :
$$0 = (\mathcal{M}(u, \mathrm{B}))^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{L}(\mathrm{N}')^n \\ 0 & (\mathrm{N}')^{n+1} \end{pmatrix}$$
d'où $(\mathrm{N}')^{n+1} = 0$, et $\mathrm{N}' \in \mathfrak{N}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente. Donc
$$\mathrm{Tr}(\mathrm{N}') = \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}(u, \mathrm{B})) = 0 + \mathrm{Tr}(\mathrm{N}') \overset{\text{HR}}{=} 0$$
et $\mathrm{H}(n+1)$ est acquis.

— **Méthode 2 [Pour les 5/2] :** Si $\mathrm{N} \in \mathfrak{N}_n(\mathbb{R})$: comme polynôme caractéristique X^n de N est scindé, en trigonalisant N, N est semblable à une matrice triangulaire stricte, d'où $\mathrm{Tr}(\mathrm{N}) = 0$.

Donc $\mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{A}_n$, et, par suite, $\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle \subset \mathrm{A}_n$.

— $\mathrm{A}_n \subset \langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle$:

— **Lemme**

Toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

En effet : Par récurrence sur $n \geqslant 1$: $\mathrm{H}(n)$: "Pour toute $\mathrm{M} \in \mathrm{A}_n$, M est semblable à une matrice de diagonale nulle."

- **Initialisation :** $\mathrm{H}(1)$ est claire.
- **Hérédité :** Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{H}(n)$, $\mathrm{M} \in \mathrm{A}_{n+1}$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

— *Cas 1 : u est une homothétie de rapport λ.*
Alors $0 = \mathrm{Tr}(u) = (n+1)\lambda$, d'où $\lambda = 0$, et $u = 0$.

— *Cas 2 : u est n'est pas une homothétie.*
Alors il existe un vecteur non nul x tel que $(x, u(x))$ soit libre.
On complète $(x, u(x))$ en une base $\mathrm{B} \overset{\text{déf}}{=} (x, u(x), x_1, \cdots, x_{n-1})$ de $\mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, et il existe $\mathrm{L} \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{M}' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$\mathcal{M}(u, \mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{L} \\ 1 & \\ 0 & \mathrm{M}' \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$
Donc $0 = \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}(u, \mathrm{B})) = 0 + \mathrm{Tr}(\mathrm{M}') = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}')$, et l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathrm{M}' \in \mathrm{A}_n$ fournit une matrice $\mathrm{P}' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice D' à diagonale nulle telles que
$$\mathrm{M}' = \mathrm{P}'\mathrm{D}'(\mathrm{P}')^{-1}$$

2. Sinon il existerait $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{NM} = \mathrm{MN} = \mathrm{I}_{n+1}$, et $0 = 0\,\mathrm{M}^{n+1} = \mathrm{N}^{n+1}\mathrm{M}^{n+1} = (\mathrm{NM})^{n+1} = \mathrm{I}_{n+1}$, ce qui serait absurde.
3. par le théorème de la base incomplète

Donc en posant $\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{P}' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \mathrm{L} & \\ 1 & & & \\ 0 & & \mathrm{D}' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{M}(u, \mathrm{B}) = \mathrm{PDP}^{-1}$$

D'où, en notant Q la matrice de passage de la base canonique à la base B,

$$\mathrm{M} = \mathrm{Q}\,\mathcal{M}(u, \mathrm{B})\,\mathrm{Q}^{-1} = (\mathrm{QP})\,\mathrm{D}\,(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Q}^{-1}) = (\mathrm{QP})\,\mathrm{D}\,(\mathrm{QP})^{-1}$$

est semblable à la matrice de diagonale nulle D.

Dans tous les cas, $\mathrm{H}(n+1)$ est acquis.

— Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{A}_n$.
D'après le lemme précédent, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale nulle telles que

$$\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$$

Comme D est à diagonale nulle, D est de la forme $\mathrm{T}_- + \mathrm{T}_+$, où T_- (resp. T_+) est triangulaire inférieure (resp. supérieure) stricte.
Donc

$$\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle \ni \mathrm{M} = \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{T}_-)\mathrm{P}^{-1}}_{\in \mathfrak{N}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{T}_+)\mathrm{P}^{-1}}_{\in \mathfrak{N}_n(\mathbb{R})}$$

d'où $\mathrm{A}_n \subset \langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle$.
Donc

$$\boxed{\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0\}}$$

□