Exercice - 38 - ENS Ulm-Lyon-Cachan (partiel) 2009 Loïc Schwaller

Exercice 1 :
Soit f une fonction réelle $1-$lipschitzienne de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Soit $\mathrm{F} \overset{\text{déf}}{=} \{x \in [0,1] \mid f(x) = x\}$.

1 Montrer que F est un intervalle fermé.

2 Si $g \in \mathrm{C}^0([0,1])$ et si f et g commutent, montrer qu'elles possèdent un point fixe commun.

Solution.

1 — F est fermé :

— **Méthode 1** : Montrons que pour toute suite u d'éléments de F qui converge vers $l \in \mathbb{R}$, $l \in \mathrm{F}$:
Soit u une telle suite.
Par continuité de f :

$$f(l) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \overset{u_n \text{ est point fixe de } f}{=} \lim_{n\to\infty} u_n = l$$

donc l est point fixe de f, et $l \in \mathrm{F}$.

— **Méthode 2 [Pour les 5/2] :** $\mathrm{F} = \left(f - \mathrm{id}_{[0,1]}\right)^{-1}\{0\}$ est fermé par continuité de $f - \mathrm{id}_{[0,1]}$.

— F est un intervalle, i.e une partie convexe :
En effet :
Comme $\mathrm{F} \subset [0,1]$ est non vide [1] et bornée, F admet une borne inférieure (resp. supérieure) notée x (resp. y). Par fermeture de F, x (resp. y) est un minimum [2] (resp. maximum).

Soit $\lambda \in [0,1]$. On pose $z \overset{\text{déf}}{=} (1-\lambda)x + \lambda y$.

- Comme f est 1-lipschitzienne :

$$|f(z) - f(x)| \leqslant |z - x| = z - x = \lambda(y - x)$$

d'où :

$$f(z) \in [f(x) - \lambda(y-x), f(x) + \lambda(y-x)] \overset{f(x)=x}{=} [x - \lambda(y-x), x + \lambda(y-x)] = [x - \lambda(y-x), z]$$

- De même :

$$\begin{aligned} f(z) \in [f(y) - (1-\lambda)(y-x), f(y) + (1-\lambda)(y-x)] &\overset{f(y)=y}{=} [y - (1-\lambda)(y-x), y + (1-\lambda)(y-x)] \\ &= [z, y + (1-\lambda)(y-x)] \end{aligned}$$

Donc

$$f(z) \in [x - \lambda(y-x), z] \cap [z, y + (1-\lambda)(y-x)] = \{z\}$$

et $f(z) = z$, d'où $z \in \mathrm{F}$.

Nous avons montré que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $z \overset{\text{déf}}{=} (1-\lambda)x + \lambda y \in \mathrm{F}$, c'est-à-dire que pour tout $z \in [\min(\mathrm{F}), \max(\mathrm{F})]$, $z \in \mathrm{F}$: i.e F est convexe.

2 Soit $g \in \mathrm{C}^0([0,1])$ telle que $f \circ g = g \circ f$.

— $g(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$:
En effet : Si $\omega \in \mathrm{F}$:

$$f(\omega) = \omega$$

d'où, en en prenant l'image par g :

$$f(g(\omega)) = g(f(\omega)) = g(\omega)$$

et, comme $g(\omega)$ est point fixe de f :

$$g(\omega) \in \mathrm{F}$$

1. Comme $f \in \mathrm{C}^0([0,1],[0,1])$, f admet un point fixe sur $[0,1]$, par application du TVI à la fonction continue $f - \mathrm{id}_{[0,1]}$ entre 0 et 1
2. Par définition de x, il existe une suite u d'éléments de F tendant vers x : la fermeture de F assure que $x = \lim u \in \mathrm{F}$

— Comme $g(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$,

$$\begin{cases} g_{|\mathrm{F}}(x) & \geqslant x = \min(\mathrm{F}) \\ g_{|\mathrm{F}}(y) & \leqslant y = \max(\mathrm{F}) \end{cases}$$

d'où $g_{|\mathrm{F}} - \mathrm{id}_{|\mathrm{F}} = g_{|\mathrm{F}} - f_{|\mathrm{F}}$ change de signe entre x et y, et le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $g_{|\mathrm{F}} - f_{|\mathrm{F}}$ sur le segment $\mathrm{F} = [x, y]$, assure l'existence d'un $\omega \in \mathrm{F}$ tel que :

$$g_{|\mathrm{F}}(\omega) - f_{|\mathrm{F}}(\omega) = 0$$

soit :

$$g(\omega) = f(\omega) \overset{\omega \in \mathrm{F}}{=} \omega$$

$\square$