Exercice - 49 - **Centrale (écrit!), puis Mines** 2005 - 2006

Si z est racine de $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}_n[X] \backslash \mathbb{C}_{n-1}[X]$, et $M \overset{\text{déf}}{=} \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \left|\frac{a_j}{an}\right|$ alors $|z| \leqslant M + 1$

Solution.

Cas 1 : $|z| > 1$
Alors[1] $z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} = 0$, d'où : $z^n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} - \cdots - \frac{a_1}{a_n} z - \frac{a_0}{a_n}$, et :

$$\begin{aligned}
|z|^n &\overset{\text{IT}}{\leqslant} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |z|^{n-1} + \cdots + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| |z| + |\frac{a_0}{a_n}| \\
&\leqslant M \left(|z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1\right) \\
&\overset{|z| \neq 1}{\leqslant} M \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \\
&\leqslant M\,|z|^{n-1} \frac{|z| - 1/|z|^{n-1}}{|z| - 1} \\
&\overset{|z|^{n-1} \geqslant 1}{\leqslant} M\,|z|^{n-1}
\end{aligned}$$

Donc, en divisant par $|z|^{n-1} > 0$,

$$|z| \leqslant M \leqslant M + 1$$

— Cas 2 : $|z| \leqslant 1$
Le résultat est immédiat, puisque $M \geqslant 0$.

Donc dans tous les cas :

$$\boxed{|z| \leqslant M+1}$$

Un peu mieux

On a même[a] montré que $|z| \leqslant \max(M, 1)$

a. puisque dans le premier cas : $|z| \leqslant M$ et dans le second : $|z| \leqslant 1$

□

Exercice - 59 - **Bac S (écrit)** 2003

Montrer que $7 | a^2 + b^2 \iff 7 | a \wedge b$.

Solution.

1. a_n est non nul, puisque $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}_n[X] \backslash \mathbb{C}_{n-1}[X]$

Un tableau de congruence modulo 7 montre que la somme de deux carrés vaut $0 \pmod 7$ si, et seulement si :

$$a, b = 0 \pmod 7$$

i.e (en notant v_7 la valuation 7-adique) :

$$v_7(a), v_7(b) > 0$$

i.e

$$v_7(a \wedge b) = \min(v_7(a), v_7(b)) > 0$$

soit :

$$7 | a \wedge b$$

et le résultat est acquis.

Tableau de congruence modulo 7

x	0	2	3	4	5	6
x^2	0	4	2	2	4	1

□