Exercice - 52 : **Centrale (partiel)** 2004

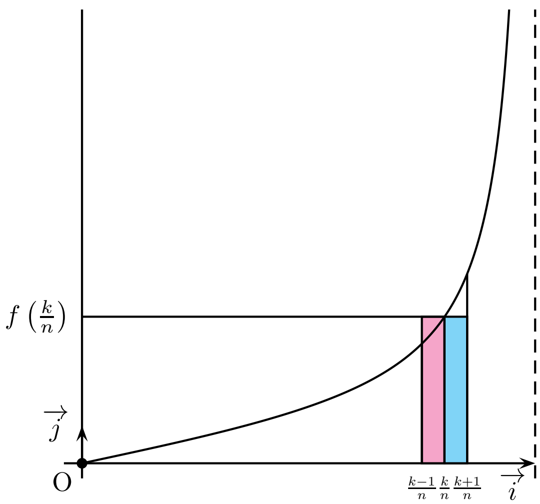
Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Solution.

Lemme

— Pour toute $f \in \mathbb{R}^{]0,1[}$ continue par morceaux et monotone : **si $\int_0^1 f$ converge**, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$



En effet[a] **:** si f est croissante[b], il vient, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f$$

Et en sommant pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\int_0^{1-1/n} f \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} f$$

On conclut, pour $n \to \infty$, par le théorème des encadrements qui **s'applique vu l'égalité des limites des suites encadrantes**.

a. Merci à M.Guelfi pour le beau graphe à gauche !
b. sans perte de généralité

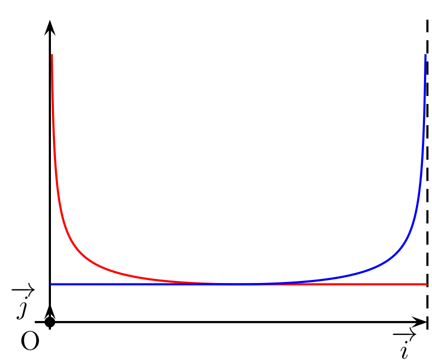
— On pose $S_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où $f \overset{\text{déf}}{=}]0,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

On note f_1 (resp. f_2) la fonction[a] continue par morceaux qui vaut $f_{|]0,1/2]}$ (resp. $f_{|]1/2,1[}$) sur $]0,1/2]$ (resp. sur sur $]1/2,1[$) et 0 sur $]1/2,1[$ (resp. sur sur $]0,1/2]$).

a. définie sur $]0,1[$



Montrons que $\int\limits_0^1 f_1$ converge, i.e que $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_\epsilon^1 f_1$ existe :

En effet[1] **:**

$$
\begin{aligned}
\forall \epsilon \in]0, 1/2[, \int_\epsilon^1 f_1 &= \int_\epsilon^{1/2} f_1 \\
&= \int_\epsilon^{1/2} f \\
&= \int_\epsilon^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \\
&= \int_\epsilon^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-(x^2-x)}} \\
&= \int_\epsilon^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1/4-(x-1/2)^2}} \\
&\overset{u=x-1/2}{=} \int_{\epsilon-1/2}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1/4-u^2}} \\
&= 2\int_{\epsilon-1/2}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-(2u)^2}} \\
&\overset{x=2u}{=} \int_{2\epsilon-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \arcsin(0) - \arcsin(2\epsilon - 1) \underset{\epsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \pi/2
\end{aligned}
$$

Par symétrie, de la même manière : $\int\limits_0^1 f_2 = \pi/2$, et en appliquant le lemme aux fonctions continues par morceaux et monotones f_1 et f_2, il vient :

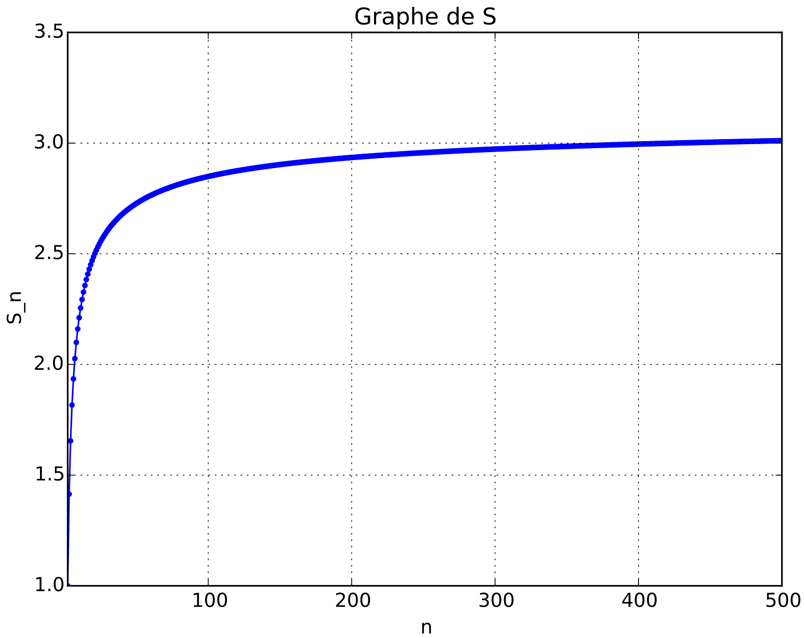
$$
\begin{cases}
\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f_1\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^1 f_1 = \pi/2 \\
\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f_2\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^1 f_2 = \pi/2
\end{cases}
$$

Donc, comme[2] $f = f_1 + f_2$, il vient que :

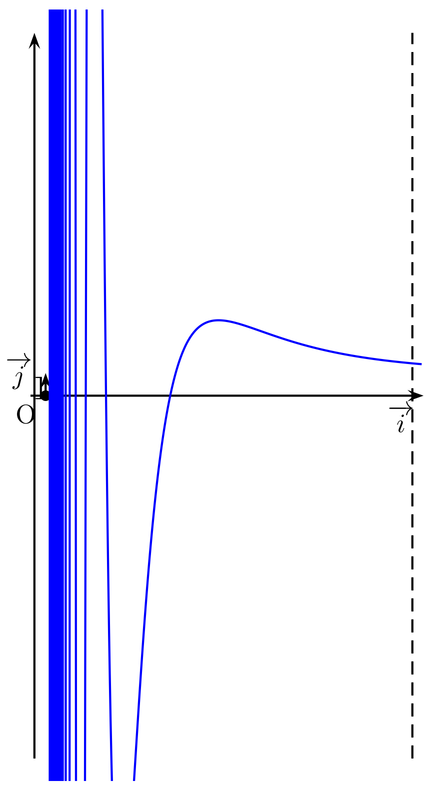
$$
\boxed{\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi}
$$

□

1. à la logique, à la fin
2. par définition de f_1 et f_2


Graphe de S
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
S_n
100
200
300
400
500
n

Sur la Convergence des sommes de Riemann



Attention, la continuité de f sur $]0,1[$ n'assure *pas* la convergence des sommes de Riemann vers son intégrale impropre, comme le montre le contre-exemple ci-contre, avec $g \overset{\text{déf}}{=} x \mapsto= \begin{cases} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} + \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
En posant, pour tout entier $n > 0$:

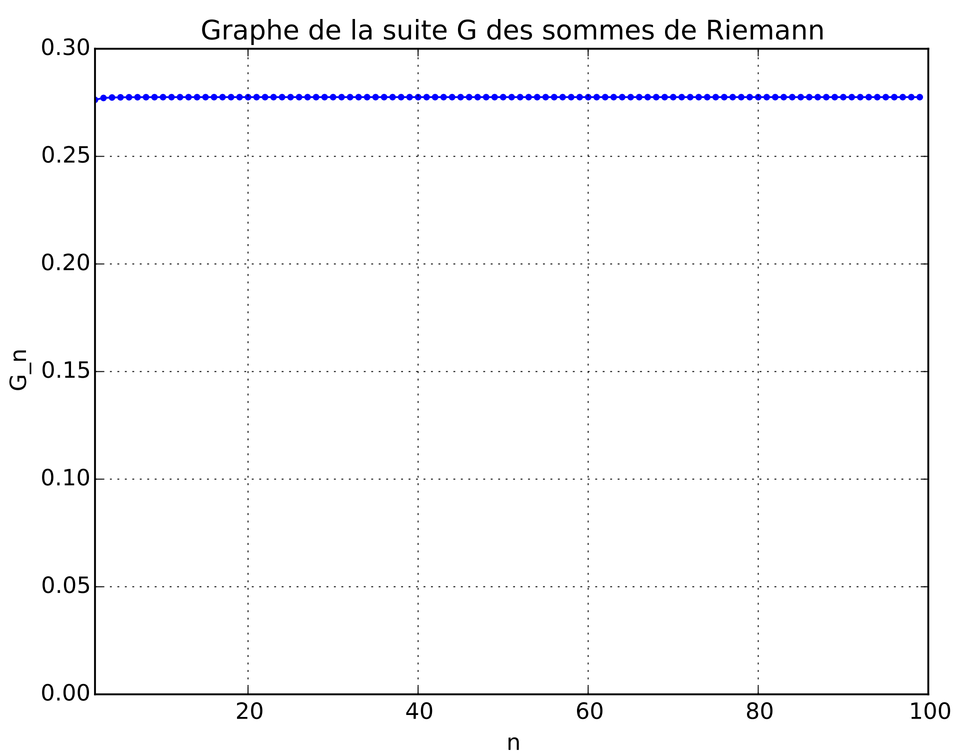
$$\begin{cases} x_0 & \overset{\text{déf}}{=} 1 \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], x_k & \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{k\pi} \\ x_n & \overset{\text{déf}}{=} 0 \\ \forall k \in [\![0, n-2]\!], \xi_k & \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\pi/2+k\pi} \\ \xi_{n-1} & \overset{\text{déf}}{=} 0 \end{cases}$$

les sommes de Riemann

$$\mathrm{G}_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1} - x_k) g(\xi_{k-1}) = (1-1/\pi)\frac{4}{\pi^2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\pi k(k-1)(\pi/2+k\pi)^2}$$

ne convergent pas vers

$$\int_0^1 g = \lim_{\epsilon \to 0+} [x\cos(1/x)]_\epsilon^1 = \cos(1) \approx 0.54030230586$$

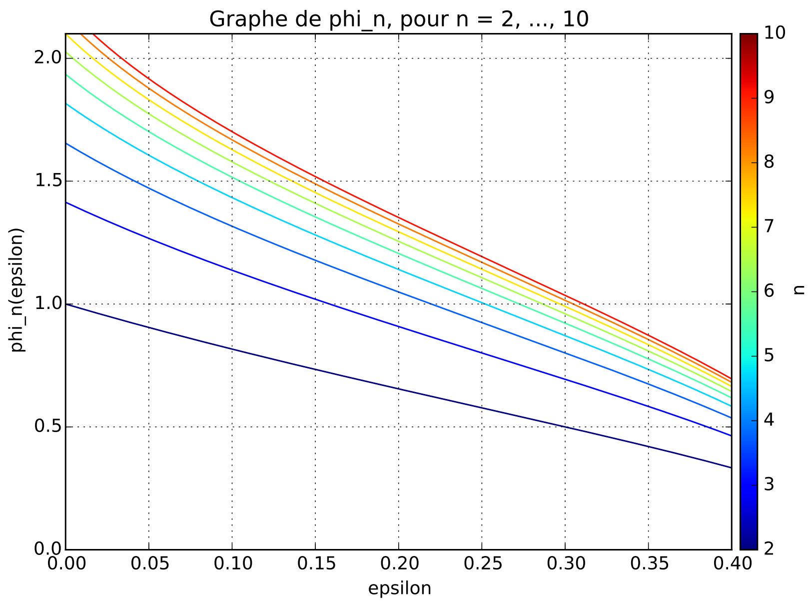


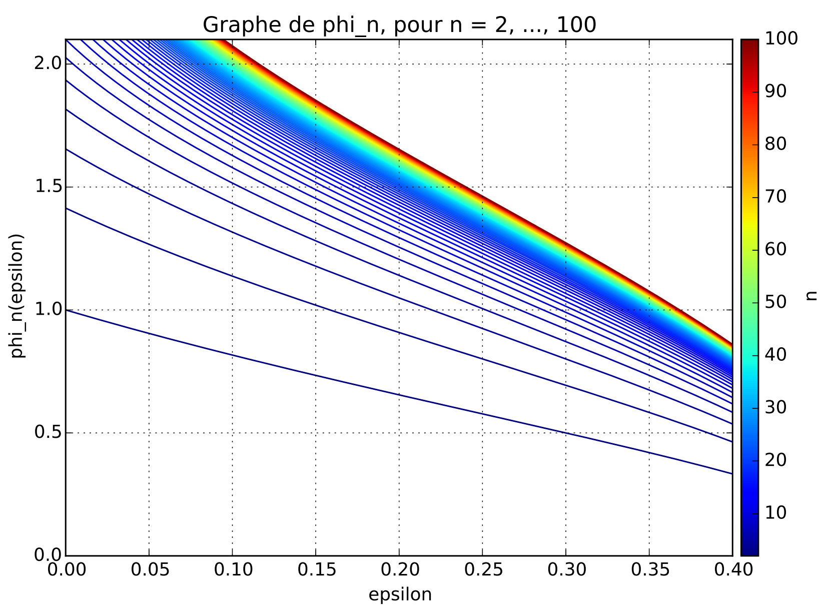
[Pour les 5/2] Sur le Théorème de Dini :

En posant

$$\forall n \geqslant 2, \phi_n \overset{\text{déf}}{=}]0,1/3] \to \mathbb{R}, \epsilon \mapsto \frac{1-2\epsilon}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k(1-2\epsilon)}{n}(1-\frac{k(1-2\epsilon)}{n})}}$$

la question se ramène à un problème de permutation de limites[a], pour la résolution duquel l'apparente croissance de $(\phi_n)_{n\geqslant 2}$ peut nous inviter à tenter d'appliquer le théorème de Dini.





Mais - à l'instar du souci qu'on a eu avec les sommes de Riemann - la non compacité de l'espace de départ est prompte à nous refroidir...

---

a. $\lim_{\epsilon\to 0+} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \phi_n(\epsilon)}_{=\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f} \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0+} \phi_n(\epsilon)}_{=\mathrm{S}_n}$