2015 - 2016

DM1

Exercice - 1 : ENS ULC 2014-2016

Trouver les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $n^\alpha \in \mathbb{N}$.

Solution. □

Exercice - 2 : ENS Algo 2015 **Charlie Brown**

Les députés du parlement de Jersey ont **chacun 3 ennemis au plus** dans ladite assemblée. Montrer qu'il existe une partition, en deux blocs, dudit parlement telle que, dans chacune des deux nouvelles structures, chaque député ait **au plus un** ennemi !

Solution.

— *Méthode 1 :* On note A l'ensemble des députés, numérotés de 1 à $|\mathrm{A}| \overset{\text{déf}}{=} n$.

Algorithme :

Données : Assemblée $\mathrm{A} \overset{\text{déf}}{=} \{1, \cdots, n\}$
Résultat : Construction d'une partition convenant
On pose $\mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1 \overset{\text{déf}}{=} \emptyset$;
pour chaque k *allant de* 1 *à* n **faire**
On place le député k dans un des deux blocs B_k ou C_k qui contient au plus un ennemi de k (il en existe nécessairement un, par le principe des tiroirs, car k a au plus trois ennemis dans A) : sans perte de généralité, disons que c'est B_k ;
On pose

$$\begin{cases} \mathrm{B}_{k+1} & \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{B}_k \cup \{k\} \\ \mathrm{C}_{k+1} & \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{C}_k \end{cases}$$

fin
A la fin de l'étape n, on a :

$$\mathrm{B}_{n+1} \sqcup \mathrm{C}_{n+1} = \mathrm{A}$$

et cette partition en deux blocs de A convient, par construction.

— *Méthode 2 (M.Guelfi) :*
On peut aussi préférer procéder de la sorte : pour chaque partition en deux blocs $\mathrm{B} \sqcup \mathrm{C}$ de A, on appelle "mesure d'ennemis" de B (resp. C) un nombre qui est initialisé à 0, et qui, pour tout couple (x, y) de députés de B (resp. de C), est incrémenté de 1 si y est un ennemi de x.

La "mesure totale d'ennemis" de $\mathrm{B} \sqcup \mathrm{C}$ est la "mesure d'ennemis" de A + la "mesure d'ennemis" de B.

— Montrons qu'une partition $\mathrm{B}_0 \sqcup \mathrm{C}_0$ dont la "mesure totale d'ennemis" est minimale convient :
En effet : S'il existait un député de[1] B_0 ayant au moins deux ennemis dans B_0, alors il aurait au

1. sans perte de généralité

maximum 1 ennemi dans C_0 (puisqu'il a au plus 3 ennemis dans toute l'assemblée).
En déplaçant ce député dans C_0, la mesure totale d'ennemis de $B_0 \sqcup C_0$ diminuerait strictement, ce qui contredirait la minimalité de la mesure d'ennemis de $B_0 \sqcup C_0$.

Notons qu'une telle partition existe, puisque l'ensemble des mesures totales d'ennemis des parties de A est fini (puisque de cardinal inférieur à 2^n) et non vide (puisque A est non vide) : il admet donc un minimum.

Reprendre $\boxed{\text{exo}}$ le raisonnement, avec une partition : $\{B_0, B_0^c\}$, qui minimise la « mesure d'ennemis » de B_0 seule. Est-ce que ça marche ? Qu'est-ce qui change ?

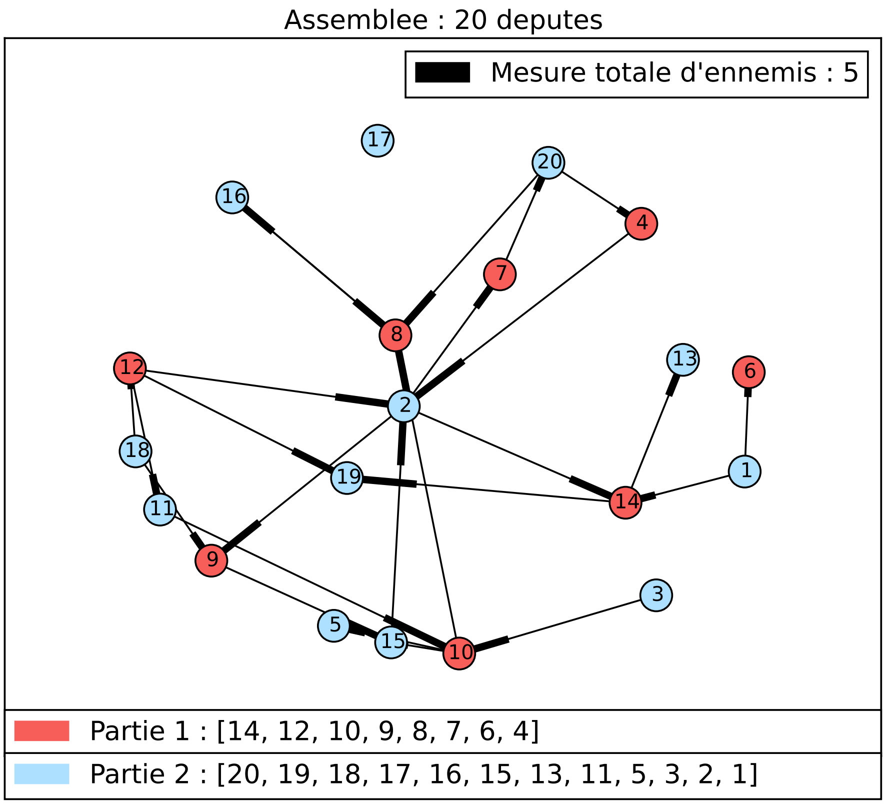
□

Simulation Python

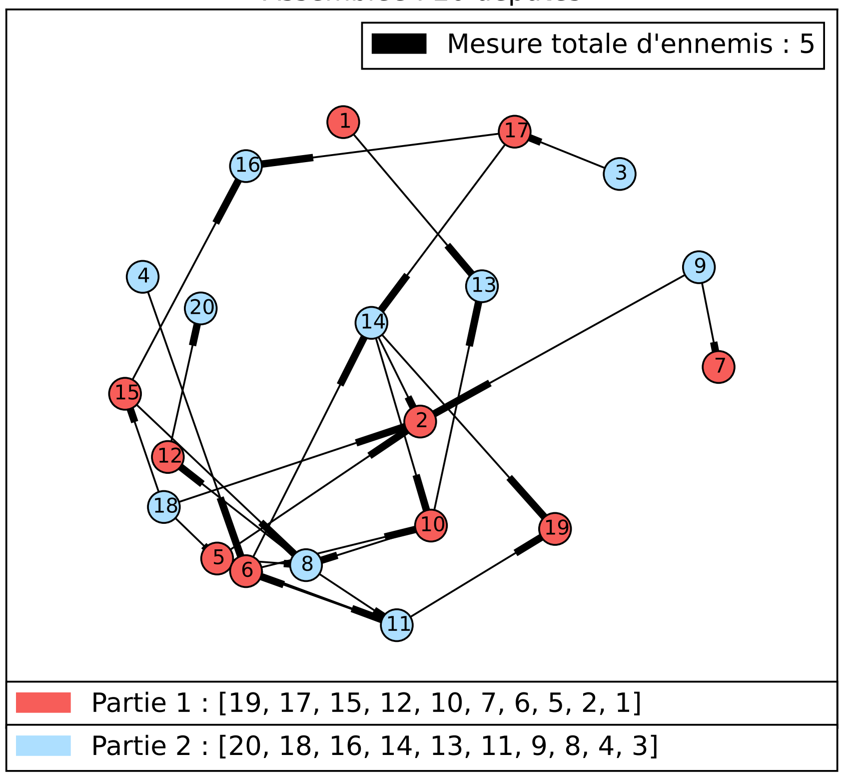
```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as mpatches
import networkx as nx
from random import randint, choice


def tracer_graphe(
        taille,
        edges,
        partie1_bin,
        mesure_ennemis,
        partie1,
        partie2):
    G = nx.DiGraph()
    G.add_nodes_from([i + 1 for i in range(taille) if L[i]])
    G.add_edges_from([(x + 1, z) for x, y in enumerate(L) for z in y if y])
    G.add_nodes_from([i + 1 for i in range(taille) if not(L[i])])

    values = ['#F75D59' if (partie1_bin >> i) & 1 ==
              1 else '#ADDFFF' for i in range(taille)]

    pos = nx.spring_layout(G)
    nx.draw_networkx_nodes(G, pos, nodelist=G.nodes(), node_color=values)
    nx.draw_networkx_labels(
        G, pos, {
            key: key for key in G.nodes()}, font_size=11)
    nx.draw_networkx_edges(G, pos, arrows=True)

    plt.title('Assemblee : ' + str(taille) + ' deputes')
    red_patch = mpatches.Patch(
        color='#F75D59',
        label='Partie 1 : ' +
        str(partie1))
    blue_patch = mpatches.Patch(
        color='#ADDFFF',
        label='Partie 2 : ' +
        str(partie2))
    black_patch = mpatches.Patch(
        color='black',
        label='Mesure totale d\'ennemis : ' +
        str(mesure_ennemis))

    legende = plt.legend(handles=[red_patch], bbox_to_anchor=(
        0., 0., 1., .102), loc=3, ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)
```

```
    legende2 = plt.legend(handles=[blue_patch], bbox_to_anchor=(
        0., -0.06, 1., .102), loc=3, ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)
    ax = plt.gca().add_artist(legende)
    ax2 = plt.gca().add_artist(legende2)

    plt.legend(handles=[black_patch])
    frame = plt.gca()

    frame.axes.get_xaxis().set_ticks([])
    frame.axes.get_yaxis().set_ticks([])
    plt.draw()


def minimisation_ennemis(ennemis):
    n = len(ennemis)

    def mesure_ennemis(partie1):
        m1, m2 = 0, 0
        partie1_ennemis, partie2_ennemis = [], []
        for k, l in enumerate(ennemis):
            if (partie1 >> k) & 1 == 1:
                partie1_ennemis.append(l)
            else:
                partie2_ennemis.append(l)

        for k in range(n):
            if (partie1 >> k) & 1 == 1:
                m1 += sum([int(item == k + 1)
                           for soustuple in partie1_ennemis for item in soustuple])
            else:
                m2 += sum([int(item == k + 1)
                           for soustuple in partie2_ennemis for item in soustuple])
        return m1 + m2

    mesure_min = mesure_ennemis(1)
    partie = 1
    for i in range(2, 2**n):
        m = mesure_ennemis(i)
        if m < mesure_min:
            mesure_min, partie = m, i

    partie_binaire = bin(partie)[2:].zfill(n)
    partie_binaire_rev = ''.join(
        '1' if x == '0' else '0' for x in partie_binaire)

    return mesure_min, [
        n - i for i, j in enumerate(partie_binaire) if j == '1'], [
        n - i for i, j in enumerate(partie_binaire_rev) if j == '1'], partie

nb_essais = 1
taille_assemblee = 20
for i in range(nb_essais):
    plt.figure(i)
    t = taille_assemblee
    #t = randint(2,taille_assemblee)
    L = [tuple(choice(list(range(1, j + 1)) + list(range(j + 1, t + 1)))
              for i in range(randint(0, 3))) for j in range(t)]
```

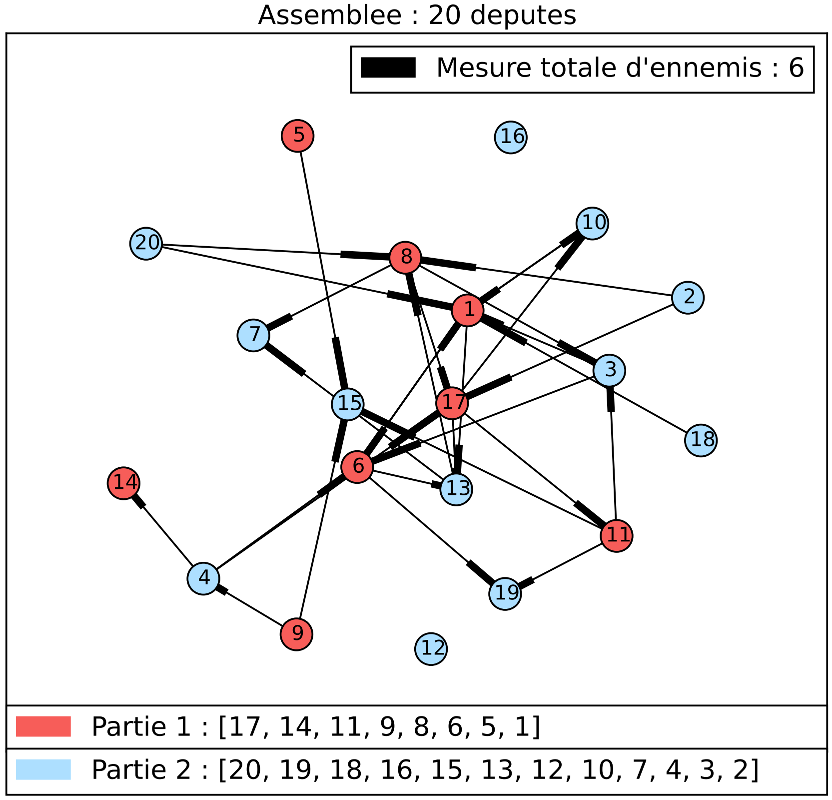
```
    mesure_totale_min, partie1, partie2, partie1_binaire = minimisation_ennemis(
        L)
    tracer_graphe(t, L, partie1_binaire, mesure_totale_min, partie1, partie2)
```



Assemblee : 20 deputes



Assemblee : 20 deputes



Flèches

Pour tout couple de députés (a,b) : si a a pour ennemi b, une flèche part de a et pointe vers b.
La "pointe" de la flèche est la partie épaisse du trait.
Pour les apprentis esthètes désappointés : si ça ne correspond pas à vos *canons* artistiques, *je vous répondrai par la bouche*[a] du développeur : « `Yes, it is ugly but drawing proper arrows with Matplotlib this way is tricky.`» ☺

a. https://www.youtube.com/watch?v=efVzOA8LKng

Simulation CamL

ENTRÉE :

```
let minimisation_ennemis ennemis =
    let n = vect_length ennemis and
     nombre_de_k k = (it_list(fun x y -> if y=k then x + 1 else x) 0)
    in
  (
    let mesure_ennemis partie1 =
        let m1 = ref 0 and m2 = ref 0 in
        let partie1_ennemis = ref [] and partie2_ennemis = ref [] in
        (
        for k=0 to (n-1) do
            if ((partie1 lsr k) land 1 = 1) then
                partie1_ennemis := ennemis.(k)@(!partie1_ennemis)
            else
                partie2_ennemis := ennemis.(k)@(!partie2_ennemis)
        done;
        for k=0 to (n-1) do
            if ((partie1 lsr k) land 1) = 1 then
                let enplus = (nombre_de_k k (!partie1_ennemis))
                        in m1 := (!m1) + enplus
            else
                let enplus = (nombre_de_k k (!partie2_ennemis))
                        in m2 := (!m2) + enplus
        done;
        (!m1)+(!m2);
        ) in

    let mesure_min = ref (mesure_ennemis 1) and partie = ref 1
        and limite_sup = int_of_float(2.**.(float_of_int n)) in
    for i=2 to limite_sup do
        let m = mesure_ennemis i in
        if m < !mesure_min then
            ( mesure_min := m;
              partie := i;
            )
        else ()
    done;
    let liste_assemblee x =
      let rec aux y liste1 liste2 compteur = match y with
        | 0 -> liste1, liste2
        | _ -> let depute = ((y mod 2)*compteur) in
                if depute>0 then
                        aux (y/2) (depute::liste1) liste2 (compteur+1)
                else    aux (y/2) liste1 (compteur::liste2) (compteur+1)
```

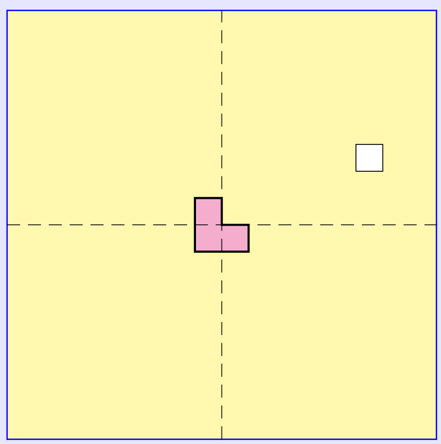
```
      in
      (aux x [] [] 1);
       in
           (!mesure_min),(liste_assemblee (!partie))
   );;

let assemblee_test =
[|[7; 2]; [2]; [10]; []; [1]; [6]; [3; 5; 3]; [2; 10; 9]; [5; 8; 10]; [1; 8]|];;

let test = minimisation_ennemis assemblee_test;;
```

SORTIE :

```
#minimisation_ennemis : int list vect -> int * (int list * int list) = <fun>
#assemblee_test : int list vect =
 [|[7; 2]; [2]; [10]; []; [1]; [6]; [3; 5; 3]; [2; 10; 9]; [5; 8; 10];
   [1; 8]|]
#test : int * (int list * int list) = 2, ([9; 8; 7; 2], [6; 5; 4; 3; 1])
```

Exercice - 3 : **ENS ULCR TIPE** 2015 **Arthur Leroy**

Dans la série « proofs without words » ; quel théorème (concernant la possibilité de paver certains domaines par des « triminos ») le dessin ci-dessous démontre-t-il par récurrence, instantanément ?



Solution. Tout carré d'aire 4^n auquel on a enlevé un carré d'aire 1 peut être pavé des triminos.

□

Exercice - 4 : **X M1** 2008 **Xingjian Xu** ; interrogateur : M. Rémy LANGEVIN

1 Si $\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{k=1}^{n+1} (\mathrm{X} - x_k)$, étudier le polynôme $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\mathrm{X}-x_k)^n}{\mathrm{P}'(x_k)}$

2 Calculer $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$

Solution.

1 Posons $Q \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(X-x_k)^n}{P'(x_k)}$. Remarquons que, pour que Q soit bien défini, les x_k sont racines simples [2] de P.

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{P'(x_k)} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-x_k)^i X^{n-i} && \text{(Binôme de Newton)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-x_k)^i}{P'(x_k)} \right)}_{\overset{\text{déf}}{=}\alpha_i} X^{n-i} \end{aligned}$$

1.1 Montrons que : $\forall i \in [\![0, n-1]\!], \alpha_i = 0$:
En effet : Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

— *Cas 1 : 0 n'est pas racine de* P

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-x_k)^i}{P'(x_k)} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-x_k)^{i+1}/P'(x_k)}{X - x_k} \right]_{X=0} && (\text{car}^{3}\ \forall k \in [\![1, n+1]\!], x_k \neq 0) \\ &= \left[\frac{(-X)^{i+1}}{P} \right]_{X=0} && (\text{car la partie entière de la fraction rationnelle est nulle}^{4}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

— *Cas 2 : 0 est racine de* P
Alors : $P \overset{\text{déf}}{=} XR$ où R est un polynôme de degré n vérifiant $R(0) \neq 0$.
Sans perte de généralité : $x_1 = 0$.

— *Pour $i \neq 0$:*

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-x_k)^i}{P'(x_k)} \\ &= -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-x_k)^{i-1}}{R'(x_k)} && (\text{car } P'(x_k) = x_k R'(x_k) + \underbrace{R(x_k)}_{=0}) \\ &= -\left[\frac{(-X)^i}{R} \right]_{X=0} && (\text{de même que précédemment}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

— *Pour $i = 0$:*

— **Méthode 1 :** [cuisse de Jupiter]
$\alpha_0 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{P'(x_k)}$ est le coefficient du monôme X^n du polynôme d'interpolation de LAGRANGE $\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j=1, j\neq k}^{n+1} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} = 1$, d'où : $\alpha_0 = 0$

— **Méthode 2 :**

$$\alpha_0 = \frac{1}{P'(0)} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{P'(x_k)} = \frac{(-1)^n}{\prod_{j=2}^{n+1} x_j} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{x_k \prod_{j=2, j\neq k}^{n+1} (x_k - x_j)}$$

2. puisque $\forall k \in [\![1, n+1]\!], P'(x_k) \neq 0$

D'où :

$$\alpha_0 \prod_{j=2}^{n+1} x_j = (-1)^n + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} x_j}{\prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} (x_k - x_j)} = (-1)^n + (-1)^{n-1} \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{\prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} -x_j}{\prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} (x_k - x_j)}}_{\text{est égal à [5] } 1} = 0$$

Donc, comme[6] $\prod_{j=2}^{n+1} x_j \neq 0 : \alpha_0 = 0$

1.2 *Pour $i = n$:*
Comme

$$(-\mathrm{X})^{i+1} = (-\mathrm{X})^{n+1} \overset{\text{D.E}}{=} (-1)^{n+1}\mathrm{P} + \underbrace{\left((-\mathrm{X})^{n+1} - (-1)^{n+1}\mathrm{P}\right)}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{S}}$$

où $\deg(\mathrm{S}) < \deg(\mathrm{P})$,

$$\begin{aligned} 0 = \left[\frac{(-\mathrm{X})^{n+1}}{\mathrm{P}}\right]_{\mathrm{X}=0} &= \left[(-1)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mathrm{S}(x_k)/\mathrm{P}'(x_k)}{\mathrm{X} - x_k}\right]_{\mathrm{X}=0} \\ &= (-1)^{n+1} + \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-x_k)^{n+1}/\mathrm{P}'x_k)}{\mathrm{X} - x_k}\right]_{\mathrm{X}=0} \\ &= (-1)^{n+1} + \alpha_n \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha_n = (-1)^n$$

1.3 Donc $\mathrm{Q} = \alpha_n$, et :

$$\boxed{\mathrm{Q} = (-1)^n}$$

2 On suppose loisiblement que $a \leqslant b$, et on note I l'intégrale à calculer.
Avec le changement de variables C^1 de $[a, b]$ dans $[0, \pi/2]$, $x = a\cos^2 u + b\sin^2 u$, il vient :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x &= -2a\cos u \sin u \mathrm{d}u + 2b \sin u \cos u \mathrm{d}u = (b-a)\sin(2u)\mathrm{d}u \\ x &= a \longrightarrow u = 0 \\ x &= b \longrightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. il est nécessaire de le préciser, car on multiplie et divise par x_k
4. puisque le degré $i + 1 \leqslant n$ du polynôme au numérateur est strictement inférieur au degré du polynôme au dénominateur $(n+1)$
5. c'est l'évaluation en 0 du polynôme d'interpolation de Lagrange $\sum_{k=2}^{n+1} \prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} \frac{\mathrm{X} - x_j}{x_k - x_j} = 1$
6. car $\forall k \in [\![2, n+1]\!], x_k \neq 0$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^{\pi/2} (b-a)\sin u \cos u \sin(2u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{(b-a)^2}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(4u))\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \underbrace{\left[\frac{\sin(4u)}{4}\right]_0^{\pi/2}}_{=0}\right) \\
&= \frac{\pi(b-a)^2}{8}
\end{aligned}
$$

□

Exercice - 5 : Mines 2015 Lance Laudulak

1 Existe-t-il une sous-suite géométrique de $u = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la somme vaille $\frac{1}{5}$?

2 Existe-t-il une sous-suite géométrique de $u = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la somme vaille $\frac{1}{7}$?

Solution. Soit $v \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{2^{na}}\right)_{n\geqslant b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ une sous-suite géométrique de u, et l un entier impair différent de 1.
Pour que sa somme vaille $\frac{1}{l}$, il faut et il suffit que : $\frac{1}{2^{ab}}\frac{1}{1-1/2^a} = \frac{1}{l}$, soit : $2^{a(1-b)}l = 2^a - 1$, et

$$l = 2^{ab} - 2^{a(b-1)}$$

Comme l est impair et différent de 1, il faut nécessairement que $ab = 0$ ou $a(b-1) = 0$; et puisque que $a = 0$ et $b = 0$ conduisent à des absurdités, nécessairement : $b = 1$.
Donc

$$l = 2^a - 1$$

1 **Pour** $l = 5$: aucune sous-suite géométrique de u ne convient.

2 **Pour** $l = 7$: avec $a = 3$ et $b = 1$, $v \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{2^{3n}}\right)_{n\geqslant 1}$ convient.

□

Exercice - 7 : Centrale M2 2010 Kahn Didah

Si $f, g \in \mathrm{C}^0([0,1],[0,1])$ commutent, montrer que :

$$\exists \omega \in [0,1]; f(\omega) = g(\omega)$$

Solution. Par l'absurde, supposons que : $f - g$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.
Donc, par continuité, $f - g$ est de signe strict constant et : $f - g \overset{\text{sans perte de généralité}}{>} 0$

— *Méthode 1 :* Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,1], f(x) > g(x) + \alpha \quad \circledast$$

En particulier, comme f est à valeurs dans $[0,1]$:

$$f(f(x)) > g(f(x)) + \alpha \overset{\text{commutativité}}{=} f(g(x)) + \alpha \overset{\circledast}{>} g(g(x)) + 2\alpha$$

Par une récurrence immédiate, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], f^n(x) > g^n(x) + n\alpha$$

Donc[7]

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n - g^n > n\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{(car } \alpha > 0\text{)}$$

ce qu'interdit "f et g sont à valeurs dans $[0,1]$".

— *Méthode 2 :* On pose

$$\mathrm{A} \overset{\text{déf}}{=} \{x \in [0,1] \mid f(x) = x\}$$

Par l'absurde : on suppose toujours que $f - g \overset{\text{sans perte de généralité}}{>} 0$
Comme A est non vide[8] et minoré (par 0), A admet une borne inférieure notée ω.

— Montrons que $\omega \in \mathrm{A}$:
Par définition de ω, il existe une suite u d'éléments de A tendant vers ω.
Par continuité de f :

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \overset{u_n \text{ est point fixe}}{=} \lim_{n\to\infty} u_n = \omega$$

donc ω est point fixe de f.

`[Pour les 5/2] Autre méthode pour montrer que` ω `est point fixe [M. Guelfi]:`
$\mathrm{A} = \left(f - \mathrm{id}_{[0,1]}\right)^{-1}\{0\}$ est fermé par continuité de $f - \mathrm{id}_{[0,1]}$, donc $\omega \in \mathrm{A}$.

— Montrons qu'il existe un élément de A strictement inférieur à ω, ce qui contredira la minimalité de ω :

$$f(g(\omega)) \overset{\text{commutativité}}{=} g(f(\omega)) = g(\omega) < f(\omega) = \omega$$

ce qui est impossible, puisque :

— $f(g(\omega)) = g(\omega)$ d'où $g(\omega) \in \mathrm{A}$

— $g(\omega) < \omega$, ce qui contredit la minimalité de ω

$\square$

Exercice - 8 : Centrale M1 2016 **Pauline Aumyal**

Si

— $\mathbb{K}$ est infini

— b injective

— $\mathrm{M} \overset{\text{déf}}{=} (a_i + b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie la propriété : les termes de chaque colonne ont même produit

montrer qu'il en va de même pour chaque ligne.

7. Petite erreur de logique habituelle
8. Comme $f \in \mathrm{C}^0([0,1],[0,1])$, f admet un point fixe sur $[0,1]$, par application du TVI à la fonction continue $f - \mathrm{id}_{[0,1]}$ entre 0 et 1

Solution. **Méthode 1 :**

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note σ_k^a (resp. σ_k^b) la k-ième fonction symétrique élémentaire des $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (resp. $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$) (avec la convention : $\sigma_0^a = \sigma_0^b = 1$)

On sait que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\prod\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_j)$ vaut une constante c, d'où :

$\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} \prod\limits_{k=1}^{n} (\mathrm{X} + a_k) - c$ a n racines distinctes (par injectivité de b) : les $\{b_j\}_{j \in [\![1,n]\!]}$

Donc $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^a \mathrm{X}^{n-k} - c = \prod\limits_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k^b \mathrm{X}^{n-k} \quad \circledast$

Montrons que $\mathrm{Q} \overset{\text{déf}}{=} \prod\limits_{k=1}^{n} (\mathrm{X} + b_k) + (-1)^n c$ a pour racines les $\{a_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$:

Par $\circledast$:

$$\begin{cases} (-1)^n \sigma_n^b & = \sigma_n^a - c \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], (-1)^k \sigma_k^b & = \sigma_k^a \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} (-1)^n \sigma_n^a & = \sigma_n^b + (-1)^n c \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], (-1)^k \sigma_k^a & = \sigma_k^b \end{cases}$$

Et, par suite :

$$\mathrm{Q} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^b \mathrm{X}^{n-k} + (-1)^n c = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k^a \mathrm{X}^{n-k} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - a_k)$$

Donc : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\prod\limits_{k=1}^{n} (a_i + b_k) + (-1)^n c = \mathrm{Q}(a_i) = 0$, soit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \prod_{k=1}^{n} (a_i + b_k) = (-1)^{n+1} c = \text{cste}$$

Le résultat est acquis.

Méthode 2 (M.Guelfi) :
En posant

$$\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} + a_i) - \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - b_i)$$

et en notant $\tilde{\mathrm{P}}$ sa fonction polynomiale associée : il existe une constante c telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \tilde{\mathrm{P}}(b_k) = c \quad \circledast$$

$\tilde{\mathrm{P}} - c$ s'annule en chacun des $(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$. Donc le polynôme $\mathrm{P} - c$ a pour racines les $(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$, qui sont au nombre de n (ils sont deux-à-deux distincts).
Comme $\mathrm{P} - c$ a n racines distinctes et est de degré inférieur à $n - 1$ (le coefficient du monôme d'ordre n est nul) : $\mathrm{P} - c$ est le polynôme nul, et :

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - b_i) = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} + a_i) - c$$

Soit :

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - \mathrm{X}) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} + a_i) + (-1)^{n+1} c$$

Et en évaluant cette expression en $-a_l$, pour tout $l \in [\![1, n]\!]$:

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i + a_l) = (-1)^{n+1} c = \text{cste}$$

ce qui conclut.

Sur la cardinalité de $\mathbb{K}$

A partir du moment où $b \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est injective, l'hypothèse "$\mathbb{K}$ est infini" n'est pas nécessaire, puisque, par $\circledast$, le polynôme $\mathrm{P} - c$ a strictement plus de racines que son degré : c'est nécessairement le polynôme nul [a].

a. ⚡ dire "la fonction polynomiale associée est nulle donc le polynôme est nul" serait faux dans un corps fini, par contre.

Interpolation de Lagrange

On peut aussi utiliser le théorème d'interpolation de LAGRANGE : Comme P est de degré inférieur à $n-1$ (le coefficient du monôme d'ordre n est nul), P est, d'après $\circledast$ (les $(b_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distincts, et on confond $\tilde{\mathrm{P}}$ et P, car $\mathbb{K}$ est infini) **le** polynôme d'interpolation de Lagrange : $c\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{\mathrm{X}-b_i}{b_k-b_i}$

Donc :

$$\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}-b_i)=\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}+a_i)-c\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{\mathrm{X}-b_i}{b_k-b_i}$$

Soit :

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i-\mathrm{X})=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}+a_i)+(-1)^{n+1}c\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{\mathrm{X}-b_i}{b_k-b_i}$$

Et en évaluant cette expression en $-a_l$, pour tout $l \in [\![1,n]\!]$:

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i+a_l)=(-1)^{n+1}c\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{b_i+a_l}{b_i-b_k}=\text{cste}$$

ce qui conclut.

C'est l'occasion, opportune, de se rendre compte que [a] : $\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{\mathrm{X}-b_i}{b_k-b_i}$ vaut peut-être 1 ☺

a. cf. exercice 4, note infrapaginale 5

□

Exercice - 13 : X M2 2014 Miss Tair

Les matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}+\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont toutes trois de rang 1.
Montrer que $\mathrm{ImA} = \mathrm{ImB}$ ou $\mathrm{KerA} = \mathrm{KerB}$

Solution. On note leurs applications linéaires respectives dans une base fixée a, b et $a+b$.

— **Si** $\mathrm{KerA} \neq \mathrm{KerB}$ **:**

Alors il existe deux [9] vecteurs $x_{\mathrm{A}} \in (\mathrm{KerA})\backslash\mathrm{KerB}$ et $x_{\mathrm{B}} \in (\mathrm{KerB})\backslash\mathrm{KerA}$, tels que $\begin{cases}\mathrm{ImA} & = \mathbb{K}a(x_{\mathrm{B}})\\ \mathrm{ImB} & = \mathbb{K}b(x_{\mathrm{A}})\end{cases}$

Or : $(a+b)(x_{\mathrm{A}}) = b(x_{\mathrm{A}})$, et $(a+b)(x_{\mathrm{B}}) = a(x_{\mathrm{B}})$, donc $b(x_{\mathrm{A}})$ et $a(x_{\mathrm{B}})$ sont liés puisqu'ils sont tous deux sur la droite $\mathrm{Im}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$.

9. $\mathrm{KerA} \neq \mathrm{KerB}$ en assure l'existence d'au moins un. S'il n'y en avait qu'un, disons x_{A}, on aurait $\mathrm{KerB} \subset \mathrm{KerA}$, et l'égalité des dimensions (par le théorème du rang) des deux espaces impliquerait $\mathrm{KerA} = \mathrm{KerB}$

Il en résulte que $\mathrm{ImA} = \mathbb{K}a(x_{\mathrm{B}}) = \mathbb{K}b(x_{\mathrm{A}}) = \mathrm{ImB}$.

— On a montré que $(\mathrm{KerA} \neq \mathrm{KerB}) \Rightarrow (\mathrm{ImA} = \mathrm{ImB})$, i.e que : $\mathrm{ImA} = \mathrm{ImB}$ ou $\mathrm{KerA} = \mathrm{KerB}$.

□

Exercice - 14 : X 1999, Centrale 2001, X 2015 Romulus Bak

On considère ici une $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{C}, \mathbb{R})$.
Montrer le théorème de BORSUK-ULAM qui affirme l'existence d'un $x \in \mathbb{U}$ tel que

$$f(x) = f(-x)$$

Solution. On veut montrer que $\mathbb{U} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - f(-x)$ s'annule sur $\mathbb{U}$.
Pour ce faire, on paramètre $\mathbb{U}$ pour se ramener à une fonction de la variable réelle :

$$\psi \overset{\text{déf}}{:} [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \theta \mapsto f(\mathrm{e}^{i\theta}) - f(\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)})$$

Comme

$$\begin{cases} \psi(0) & = f(1) - f(-1) \\ \psi(\pi) & = f(-1) - f(1) \end{cases}$$

$\psi(0)\psi(\pi) \leqslant 0$ et, par continuité [10] de ψ sur $[0, \pi]$, le TVI appliqué à ψ entre 0 et π conclut.

□

Exercice - 15 - CCP 2015

Y a-t-il des suites $\epsilon \in c^0_{\mathbb{R}}$ décroissantes & telles que

$$\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon_n}}\right)_{n \geqslant 1} \in \ell^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{N}^*)$$

Solution. On note ϵ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \epsilon_n \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } n \leqslant 16 \\ 2\dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} & \text{sinon} \end{cases}$

Montrons que ϵ convient, i.e que $u \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{n^{1+\epsilon_n}}\right)_{n \geqslant 1} \in l^1_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{N}^*)$

— ϵ décroît :
ϵ décroît sur $[\![17, +\infty[$ comme composée de la fonction décroissante $[e, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{ln(x)}{x}$ et de la fonction croissante $[\![17, +\infty[\to [e, +\infty[,\ x \mapsto \ln(x)$.
De plus, $\epsilon_{17} < 1$, d'où ϵ décroît sur $\mathbb{N}^*$.

— ϵ tend vers 0 :
Comme $\ln(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \ \epsilon_n = \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par composition.

— u est un TG de série absolument convergente :
En effet :

$$\forall n \geqslant 17,\ u_n = \frac{1}{n\ln^2(n)}$$

La fonction $\dfrac{1}{\bullet\ln^2(\bullet)}$ est continue par morceaux, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\bullet\ln^2(\bullet)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sont de même nature.

Comme : $\displaystyle\int_1^{\bullet} \frac{1}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{\ln}\right]_1^{\bullet}$ converge en $+\infty$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\bullet\ln^2(\bullet)}$ converge, et, par suite, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ aussi [11].

10. comme composée de fonctions continues
11. et comme le TG u est positif, l'absolue convergence de la série équivaut à sa convergence

$\square$

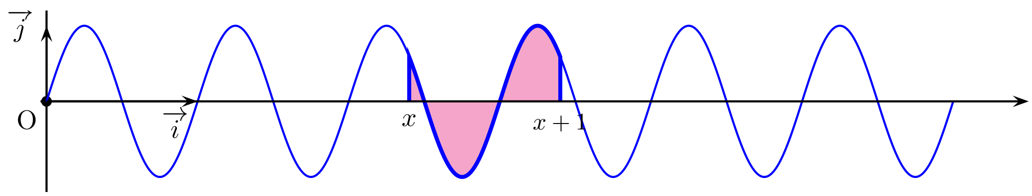
Exercice - 17 : Centrale PSI 2010

$$\Phi \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} C^0(\mathbb{R}) & \to C^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto \Phi(f) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int\limits_x^{x+1} f \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est-elle injective ? Surjective ?

Solution.

1 Φ n'est pas injective :
Par linéarité de l'intégrale, Φ est linéaire, d'où l'injectivité de Φ équivaut à la trivialité de son noyau.
Or, $0 \neq f \overset{\text{déf}}{=} \sin(2\pi \bullet) \in \mathrm{Ker}\Phi$, d'où Φ n'est pas injective.



2 Φ n'est pas surjective :
Pour toute fonction f continue, $\int\limits_\bullet^{\bullet+1} f = \int\limits_0^{\bullet+1} f - \int\limits_0^{\bullet} f$ est [12] de classe C^1.
Donc si Φ était surjective, toute fonction continue serait de classe C^1, ce qui n'est absolument pas le cas.

$\square$

Exercice - 18 : Mines (partiel) 2012 **Emmanuel Schneider**

Exercice 2, en direct pour les 10 dernières minutes :
Pour toute partie A de $[\![1,n]\!]$, on pose $\omega(A) = \max(A) - \min(A)$.
Calculer la moyenne M_n des ω et donner un équivalent de M_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (2^n - 1)M_n$: pour tout entier $n > 0$, u_n est la somme des diamètres des parties de $[\![1,n]\!]$ ($u_1 = M_1 = 0, u_2 = 3M_2 = 1$).
Il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \overbrace{\text{somme des diamètres des parties de } [\![1,n+2]\!]}^{u_{n+2}} = & \overbrace{\text{somme des diamètres des parties de } [\![1,n+1]\!]}^{u_{n+1}} \\ & + \overbrace{\text{somme des diamètres des parties de } [\![2,n+2]\!]}^{u_{n+1}} \\ & - \overbrace{\text{ceux qu'on a comptés deux fois, i.e dans } [\![2,n+1]\!]}^{u_n} \\ & + \text{les parties restantes}^{13} \overbrace{\text{contenant 1 et } n+2 \text{, de diamètre } n+1}^{2^n(n+1)} \end{aligned}$$

12. comme somme de fonctions de classe C^1
13. elles sont de la forme $\{1, n+1\}$ union "une partie quelconque de $[2, n+1]$" : il y en a donc $|\mathcal{P}([2, n+1])| = 2^n$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 2^n(n+1)$$

En posant $\forall k \in \mathbb{N}^*, v_k \overset{\text{déf}}{=} u_{k+1} - u_k$, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} - v_k = 2^k(k+1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; en sommant pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} v_{k+1} - v_k = \sum_{k=1}^{n} 2^k(k+1)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\underbrace{v_{n+1}}_{u_{n+2}-u_{n+1}} - \underbrace{v_1}_{=u_2-u_1=1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=1}^{n} x^{k+1}\right]_{x=2} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\frac{x^n-1}{x-1}\right]_{x=2} \\
&= \left[\frac{((n+2)x^{n+1}-2x)(x-1)-(x^{n+2}-x^2)}{(x-1)^2}\right]_{x=2} \\
&= 2^{n+1}n
\end{aligned}$$

Et, de même, si $\mathrm{N} \geqslant 1$, en sommant [14] pour n allant de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_{n+2} - u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(2^{n+1}n + 1\right)$$

Soit :

$$\begin{aligned}
u_{\mathrm{N}+2} - \underbrace{u_2}_{=1} &= 4\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(2^{n-1}n\right) + \mathrm{N} \\
&= 4\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \left(2^{n}(n+1)\right) + \mathrm{N} \\
&= 4\sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \left(2^{n}(n+1)\right) + \mathrm{N} + 4 \\
&= 4\times 2^{\mathrm{N}}(\mathrm{N}-1) + \mathrm{N} + 4 = 2^{\mathrm{N}+2}(\mathrm{N}-1) + \mathrm{N} + 4
\end{aligned}$$

et :

$$\forall \mathrm{N} \geqslant 3, u_{\mathrm{N}} = 2^{\mathrm{N}}(\mathrm{N}-3) + \mathrm{N} + 3 \quad \text{(valable aussi pour N=1 et N=2)}$$

Donc [15], par définition de u :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{M}_n = \frac{2^n(n-3)+n+3}{2^n-1} = n-3+\frac{2n}{2^n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} n}$$

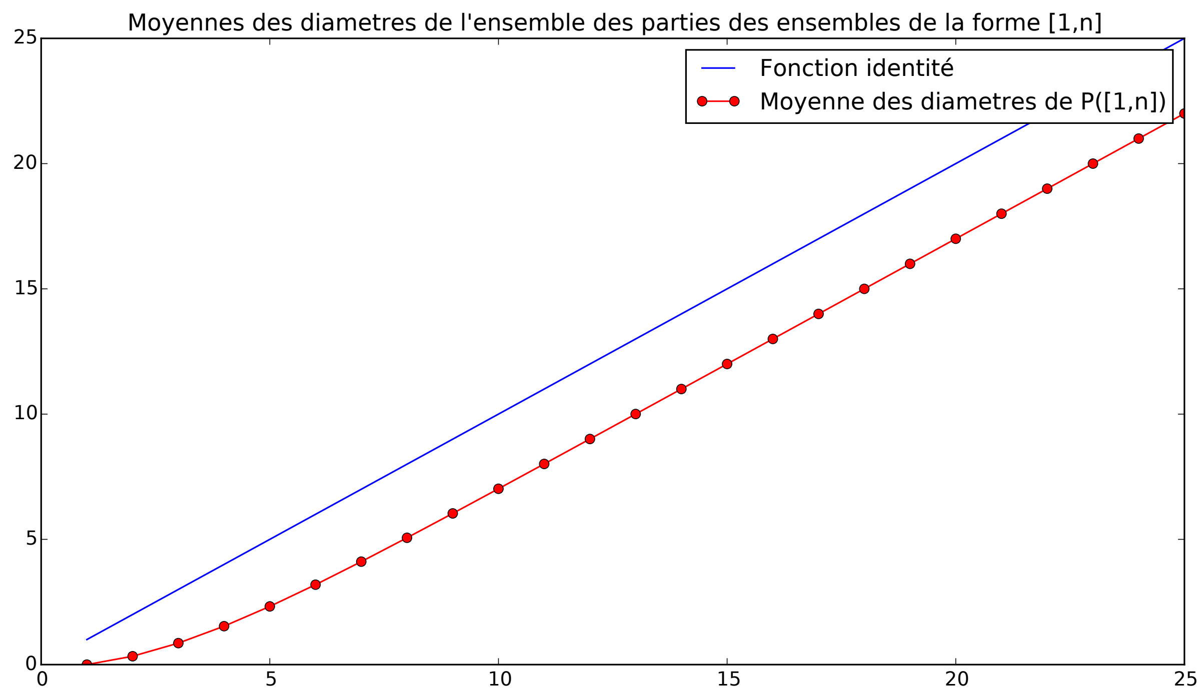
Simulation python :

14. petite erreur de logique
15.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
## TRES LENT
# def moyennes_diametres(m):
#     Y=[]
#     X = range(1,m+1)
#     ens_parties = []
#     ens = []
#     for n in X:
#         ens.append(n)
#         for i in range(2**(n-1),2**n):
#             nouvelle_partie = []
#             for j in range(n):
#                 if (i>>j)&1 == 1:
#                     nouvelle_partie.append(ens[j])
#             ens_parties.append(nouvelle_partie)
#
#         Y.append(sum(map(lambda x:max(x)- min(x), ens_parties))/(2**n-1))
#                 p2 = plt.plot(X,X,label='Fonction identite')
#                 p1 = plt.plot(X,Y,marker='o', label='Moyenne des diametres de P([1,n])'
#                                 , color='red')
#                 plt.title("Moyennes des diametres de l'ensemble des parties"
#                                         "des ensembles de la forme [1,n]")
#                 plt.legend()
#                 plt.show()

def moyennes_diametres(m):
    Y=[]
    X = range(1,m+1)
    diametres = []
    for n in X:
        for i in range(2**(n-1),2**n):
            min_courant = n-1
            max_courant = 0
            for j in range(n):
                if (i>>j)&1 == 1: # on "deplace" vers la droite de j rang la
                # representation binaire de i, puis on applique l'operateur
                # binaire "AND" pour verifier si il y a un "1" en position j
                # (position 1 = unites)

                    if j < min_courant :
                        min_courant = j
                    elif j > max_courant:
                        max_courant = j
            diametres.append(max_courant - min_courant)

        Y.append(sum(diametres)/(2**n-1))

        p2 = plt.plot(X,X,label='Fonction identite')
        p1 = plt.plot(X,Y,marker='o'
                , label='Moyenne des diametres de P([1,n])'
                , color='red')%
    plt.title("Moyennes des diametres de l'ensemble des parties"
                "des ensembles de la forme [1,n]")
    plt.legend()
    plt.show()
```

```
moyennes_diametres(25)
```

□



L'écart des altitudes entre la courbe bleue et la courbe rouge, qui tend vers 3, vaut exactement : $3 - \dfrac{2n}{2^n - 1}$.

Exercice - 20 - **forum UPS** juin 2013

Donner un équivalent, lorsque $n \to \infty$, du nombre des surjections $\sigma(n,p)$ d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.

Solution. `M.Guelfi` :
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et A (resp. B) un ensemble à n (resp. p) éléments, notés, sans perte de généralité, $1, \cdots, n$ (resp. $1, \cdots p$).
On note S_{np} (resp. N_{np}) le nombre de fonctions surjectives (resp. non surjectives) de A dans B.
Comme, pour chaque fonction $f \in \mathrm{B}^{\mathrm{A}}$ non surjective, on peut choisir au moins un élément non atteint par f parmi les p éléments de B, l'injectivité des fonctions, pour tout $q \in [\![1, p]\!]$:

$$\mathrm{id}_q \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{id}\big|_{\{f \in \mathrm{B}^{\mathrm{A}} \mid f \text{ non surjective n'atteignant pas } q\}} \in \Big(\mathrm{B}\backslash\{q\}\Big)^{\mathrm{A}}$$

assure que :

$$\forall q \in [\![1, p]\!], \left|\{f \in \mathrm{B}^{\mathrm{A}} \mid f \text{ non surjective n'atteignant pas } q\}\right| \leqslant |\mathrm{B}\backslash\{q\}|^{|\mathrm{A}|} = (p-1)^n$$

En sommant, pour q allant de 1 à p il vient :

$$\mathrm{N}_{np} \leqslant \sum_{q=1}^{p} \left|\{f \in \mathrm{B}^{\mathrm{A}} \mid f \text{ non surjective n'atteignant pas } q\}\right| \leqslant p(p-1)^n$$

Donc[16] : $\mathrm{N}_{np} \underset{n\to+\infty}{=} o(p^n)$, et

$$\mathrm{S}_{np} = p^n - \mathrm{N}_{np} \underset{n\to+\infty}{=} p^n + o(p^n) \underset{n\to\infty}{\sim} p^n$$

□

Exercice - 22 - X M_2 2012 - à la mode pour 2015

On appelle ici A l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ dont tous les coefficients valent 0 ou 1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists\, !\mathrm{P} \in \mathrm{A};\ n = \mathrm{P}(-2)$$

Solution.
Démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition en base -2 des entiers naturels suffira. Elle découle directement de l'existence (et de l'unicité de l'écriture) de la division euclidienne pour les entiers relatifs, à condition d'imposer au reste d'être positif.

Division Euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple (q, r) d'entiers tels que :

$$\begin{cases} a & = bq + r \\ r & \in [\![0, |b| - 1]\!] \end{cases}$$

En effet : Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

— EXISTENCE :
Si $b|a$, c'est immédiat.

Sinon : $|a| \overset{\text{DE}}{=} |b|q_0 + r_0$ (avec $0 < r_0 < |b|$)
L'existence d'entiers q, r convenant est assurée en choisissant :

Couple d'entiers convenant		
Si	$b > 0$	$b < 0$
$a \geqslant 0$	$q \overset{\text{déf}}{=} q_0,\ r \overset{\text{déf}}{=} r_0$	$q \overset{\text{déf}}{=} -q_0,\ r \overset{\text{déf}}{=} r_0$
$a \leqslant 0$	$q \overset{\text{déf}}{=} -q_0 - 1,\ r \overset{\text{déf}}{=} b - r_0$	$q \overset{\text{déf}}{=} q_0 + 1,\ r \overset{\text{déf}}{=} -b - r_0$

— UNICITÉ :
Si (q, r) et (q', r') conviennent : $bq + r = bq' + r'$, et $r - r' = b(q' - q)$ est un multiple de b appartenant, par hypothèse, à $[\![1 - |b|, |b| - 1]\!]$; d'où $r - r'$ est nul, et, par suite, $q' - q$ aussi.

L'existence et l'unicité de la décomposition des entiers en base -2 est donnée par :

16. Car $\frac{\mathrm{N}_{np}}{p^n} = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Algorithme : Construction de la décomposition en base -2

Données : entier n
Résultat : Décomposition en base -2 de n
$n \overset{\text{DE DANS } \mathbb{Z}}{=} -2q_0 + r_0$ (avec $r_0 \in \{0,1\}$) ;
$k \overset{\text{déf}}{=} 0$;
tant que $q_k \neq 0$ **faire**
  $q_k \overset{\text{DE DANS } \mathbb{Z}}{=} -2q_{k+1} + r_{k+1}$;
  On a alors

$$\begin{cases} \forall i \leqslant k+1, r_i \in \{0,1\} \\ n = r_0 + (-2)^1 r_1 + \cdots + (-2)^{k+1} r_{k+1} + (-2)^{k+2} q_{k+1} \end{cases}$$

  $k \longleftarrow k+1$;
fin
A l'issue de la boucle, on a :

$$\begin{cases} \forall i \leqslant k, r_i \in \{0,1\} \\ n = r_0 + (-2)^1 r_1 + \cdots + (-2)^k r_k \end{cases}$$

— TERMINAISON : La terminaison de l'algorithme est assurée par la **stricte décroissance** de la suite positive d'entiers $|q|$, qui converge nécessairement vers 0.
— CORRECTION : la correction est immédiate, par construction[17].

Pour revenir aux notations de l'énoncé :
Si n est un entier naturel, on lui applique l'algorithme précédent, et en posant $\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} r_0 + r_1\mathrm{X} + \cdots + r_k\mathrm{X}^k$, P est l'unique polynôme de A tel que $n = \mathrm{P}(-2)$. □

Script Python

ENTRÉE

```python
def div_eucl(a,b=-2):
    q,r = divmod(abs(a),abs(b))
    if r==0:
        return (q,0) if ((a >= 0 and b > 0) or (a <= 0 and b < 0)) else (-q,0)
    elif a >= 0 and b > 0:
        return q,r
    elif a >= 0 and b < 0:
        return -q,r
    elif a <= 0 and b > 0:
        return -q-1,b-r
    else :
        return q+1,-b-r

def Polynome_negabinaire(n):
    C = [] # Coefficients du polynome
    q,r = div_eucl(n)
    C.append(r)
    while q != 0:
        q,r = div_eucl(q)
        C.append(r)
    return C
```

17. l'existence de la décomposition en base -2 est claire et la suite r est déterminée de manière unique, par unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

```
Polynome_negabinaire(10)
```

SORTIE (iPython) :

```
In [1]: Polynome_negabinaire(19)
Out[1]: [1, 1, 1, 0, 1]
```

Script CamL

ENTRÉE

```
let div_eucl a b = let q,r = abs(a)/abs(b), abs(a) mod abs(b) in
    if r=0 then
        if ((a >= 0 && b > 0) || (a <= 0 && b < 0)) then (q,0)
        else (-q,0)
    else if (a >= 0 && b > 0) then
        q,r
    else if (a >= 0 && b < 0) then
        -q,r
    else if (a <= 0 && b > 0) then
        -q-1,b-r
    else
        q+1,-b-r;;

let rec Polynome_negabinaire n = match (div_eucl n (-2)) with
        | 0, r -> [r]
        | q, r -> r::(Polynome_negabinaire q);;

Polynome_negabinaire(19);;
```

SORTIE

```
#div_eucl : int -> int -> int * int = <fun>
#Polynome_negabinaire : int -> int list = <fun>
#- : int list = [1; 1; 1; 0; 1]
```

Exercice - 34 - ULC / X / C / M *à la mode !* - American Mathematical Monthly mai 2011

Sur une sphère euclidienne 3-dimensionnelle $\overset{\text{déf}}{:}$ S, on donne trois nuages de n points chacuns : $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$.
Montrer que :

$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{S}\,;\ \sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{A}_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{B}_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{C}_k\|_2^2$$

Solution. `M.Guelfi` :
Comme l'énoncé, on confondra point et vecteur allant de l'origine à ce point. On note $\langle .|. \rangle$ le produit scalaire canonique, O le centre de S, et, sans perte de généralité, on se place dans un repère orthogonal d'origine O.

— ANALYSE :
Si $\mathrm{P} \in \mathrm{S}$ convient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{A}_k\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{n} \langle \mathrm{P}-\mathrm{A}_k | \mathrm{P}-\mathrm{A}_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\langle \mathrm{P}|\mathrm{P} \rangle}_{=\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\|_2^2=1} + \underbrace{\langle \mathrm{A}_k|\mathrm{A}_k \rangle}_{=\|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\|_2^2=1} - 2\langle \mathrm{P}|\mathrm{A}_k \rangle \right) \\
&= 2n - 2\sum_{k=1}^{n} \langle \mathrm{P}|\mathrm{A}_k \rangle \\
&= 2n - 2\left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k \right\rangle
\end{aligned}$$

Il en est de même pour $\sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{B}_k\|_2^2$ et $\sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{C}_k\|_2^2$.
Comme ces trois sommes sont égales :

$$\left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k}_{\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{A}_{\text{tot}}} \right\rangle = \left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k}_{\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{B}_{\text{tot}}} \right\rangle = \left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_k}_{\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{C}_{\text{tot}}} \right\rangle$$

D'où :

$$\circledast \begin{cases} \left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\mathrm{A}_{\text{tot}} - \mathrm{B}_{\text{tot}}}_{=\overrightarrow{\mathrm{B}_{\text{tot}}\mathrm{A}_{\text{tot}}}} \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\mathrm{B}_{\text{tot}} - \mathrm{C}_{\text{tot}}}_{=\overrightarrow{\mathrm{C}_{\text{tot}}\mathrm{B}_{\text{tot}}}} \right\rangle &= 0 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\mathrm{B}_{\text{tot}}\mathrm{A}_{\text{tot}}}, \overrightarrow{\mathrm{C}_{\text{tot}}\mathrm{B}_{\text{tot}}}\right)$, d'où P est **le** point d'intersection de la sphère S et de la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par O.

SYNTHÈSE :
Réciproquement, ce point convient (partant de $\circledast$, on peut remonter les calculs et aboutir à la relation de l'énoncé).

□

Exercice - 39 - **ENS Ulm** 2000 - 2008

Quel est le nombre des racines réelles de $n\mathrm{X}^n - \mathrm{X}^{n-1} - \cdots - \mathrm{X} - 1$?

Solution. On pose $\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} n\mathrm{X}^n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{X}^k$.
1 est clairement une racine réelle de P.
Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

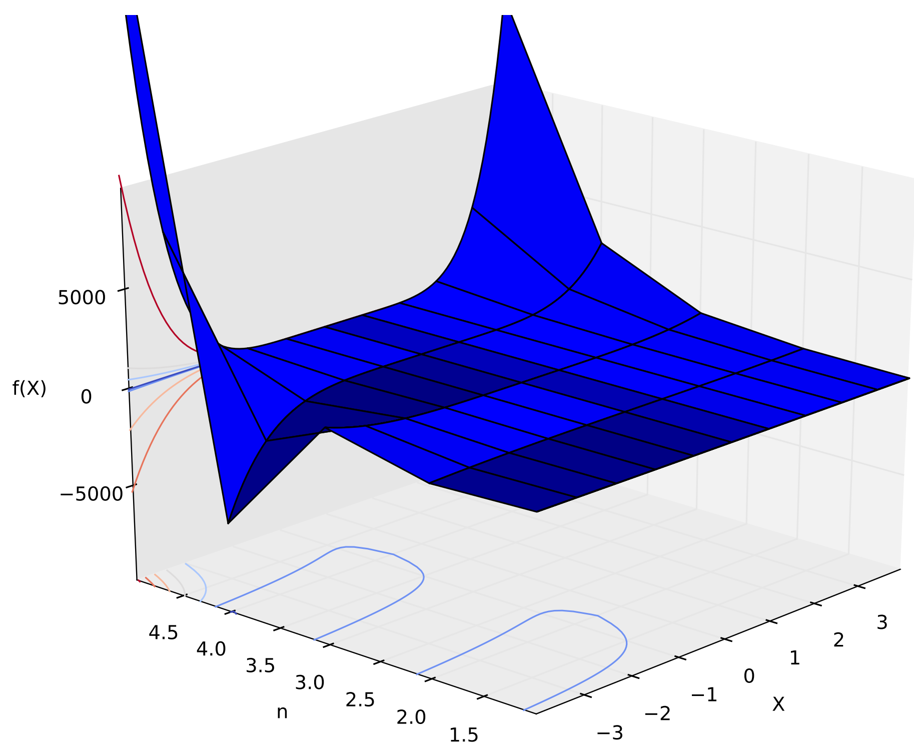
$$\begin{aligned} & \mathrm{P}(x) = 0 \\ \iff \quad & nx^n = \frac{x^n - 1}{x - 1} \\ \iff \quad & nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = 0 \end{aligned}$$

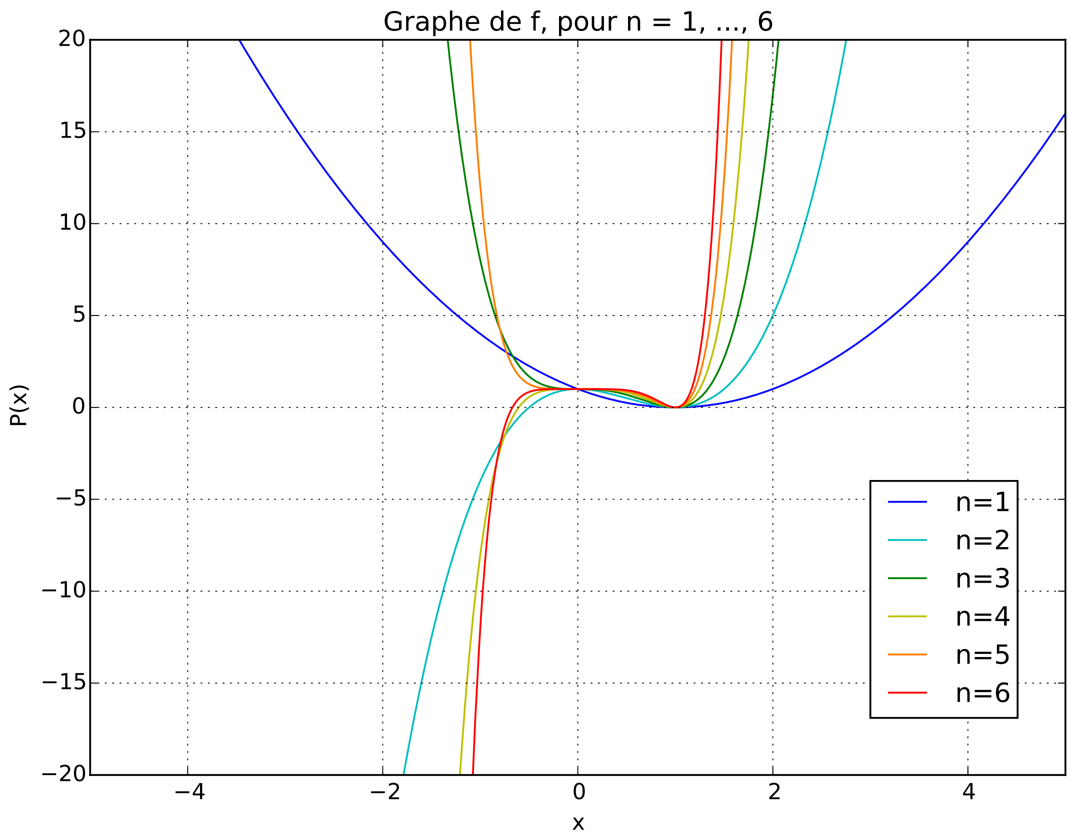
En notant $f \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R},\ t \mapsto nt^{n+1} - (n+1)t^n + 1$, f est dérivable (car polynomiale) sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et $f' = \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R},\ t \mapsto n(n+1)t^{n-1}(t-1)$.

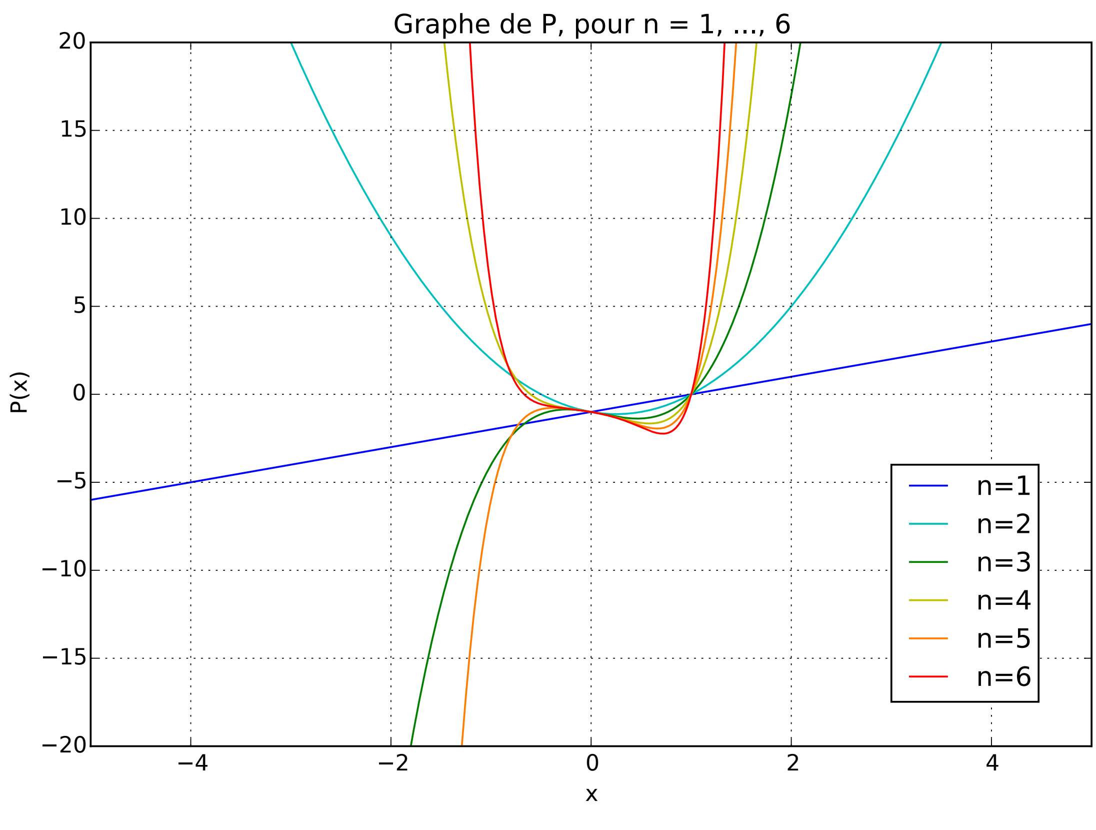
L'étude du signe de f' sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ montre que :

- Si n est impair : P a une seule racine réelle (1).
- Si n est pair : P a deux racines réelles (1 et une racine strictement négative).

$\square$




Graphe de f, pour n = 1, ..., 6
P(x)
x
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n=6


Graphe de P, pour n = 1, ..., 6
P(x)
x
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n=6

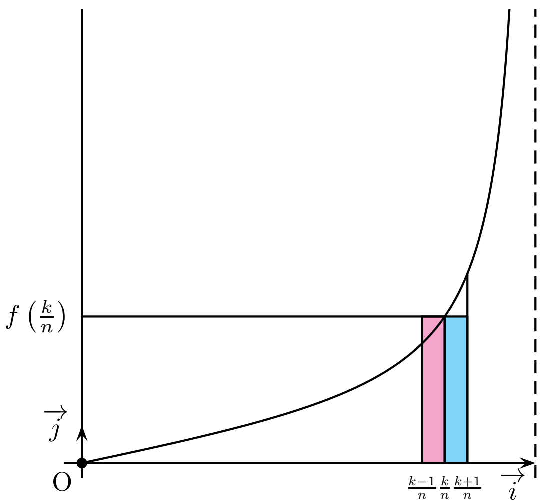
Exercice - 52 : Centrale (partiel) 2004

Calculer
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Solution.

Lemme

— Pour toute $f\in\mathbb{R}^{]0,1[}$ continue par morceaux et monotone : **si $\int_0^1 f$ converge**, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f$



En effet[a] **:** si f est croissante[b], il vient, pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$:
$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f\leqslant\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{k/n}^{(k+1)/n} f$$
Et en sommant pour k allant de 1 à $n-1$:
$$\int_0^{1-1/n} f\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{1/n}^{1} f$$
On conclut, pour $n\to\infty$, par le théorème des encadrements qui **s'applique vu l'égalité des limites des suites encadrantes**.

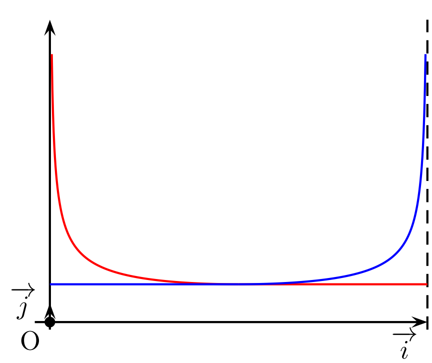
a. Merci à M.Guelfi pour le beau graphe à gauche !
b. sans perte de généralité

— On pose $S_n\overset{\text{déf}}{=}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
où $f\overset{\text{déf}}{=}]0,1[\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

On note f_1 (resp. f_2) la fonction[a] continue par morceaux qui vaut $f_{|]0,1/2]}$ (resp. $f_{|]1/2,1[}$) sur $]0,1/2]$ (resp. sur sur $]1/2,1[$) et 0 sur $]1/2,1[$ (resp. sur sur $]0,1/2]$).

a. définie sur $]0,1[$



Montrons que $\int\limits_0^1 f_1$ converge, i.e que $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_\epsilon^1 f_1$ existe :

En effet [18] **:**

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon \in]0,1/2[, \int_\epsilon^1 f_1 &= \int_\epsilon^{1/2} f_1 \\
&= \int_\epsilon^{1/2} f \\
&= \int_\epsilon^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \\
&= \int_\epsilon^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-(x^2-x)}} \\
&= \int_\epsilon^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1/4-(x-1/2)^2}} \\
&\overset{u=x-1/2}{=} \int_{\epsilon-1/2}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1/4-u^2}} \\
&= 2\int_{\epsilon-1/2}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-(2u)^2}} \\
&\overset{x=2u}{=} \int_{2\epsilon-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \arcsin(0)-\arcsin(2\epsilon-1) \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \pi/2
\end{aligned}$$

Par symétrie, de la même manière : $\int\limits_0^1 f_2 = \pi/2$, et en appliquant le lemme aux fonctions continues par morceaux et monotones f_1 et f_2, il vient :

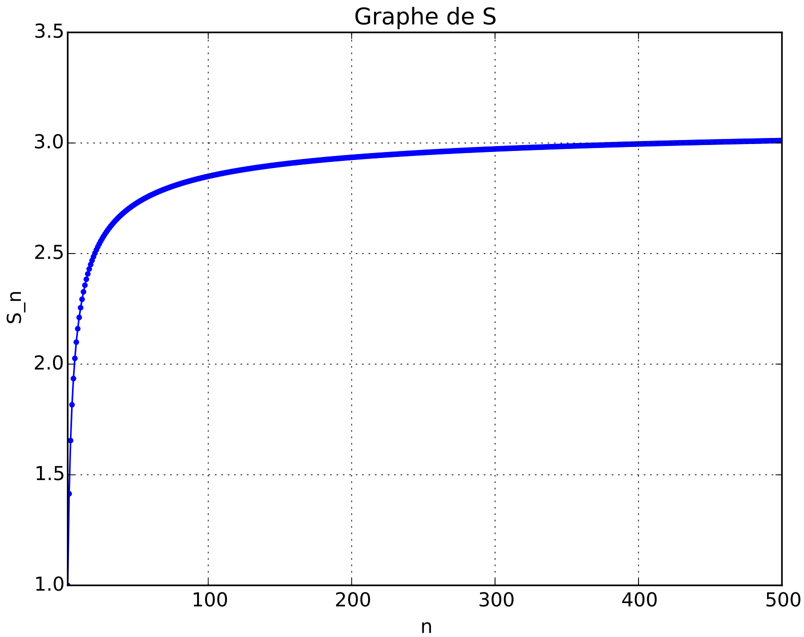
$$\begin{cases}
\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f_1\left(\frac{k}{n}\right) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^1 f_1 = \pi/2 \\[2ex]
\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f_2\left(\frac{k}{n}\right) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^1 f_2 = \pi/2
\end{cases}$$

Donc, comme [19] $f = f_1 + f_2$, il vient que :

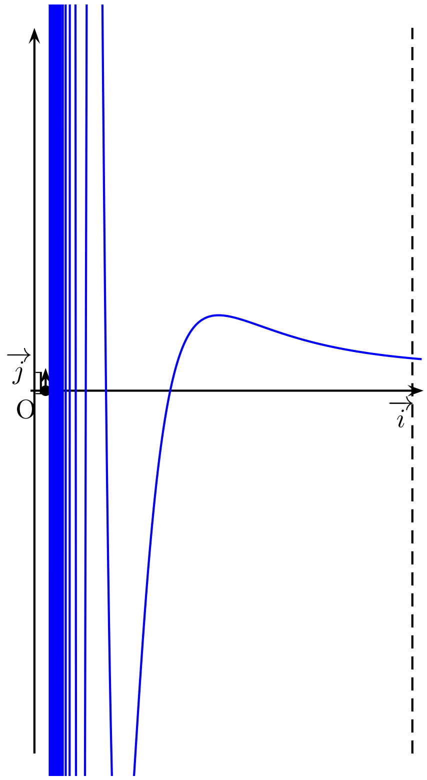
$$\boxed{\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi}$$

$\square$

18. à la logique, à la fin
19. par définition de f_1 et f_2


Graphe de S
S_n
n
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
100
200
300
400
500

Sur la Convergence des sommes de Riemann



Attention, la continuité de f sur $]0,1[$ n'assure *pas* la convergence des sommes de Riemann vers son intégrale impropre, comme le montre le contre-exemple ci-contre, avec $g \overset{\text{déf}}{=} x \mapsto= \begin{cases} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} + \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En posant, pour tout entier $n > 0$:

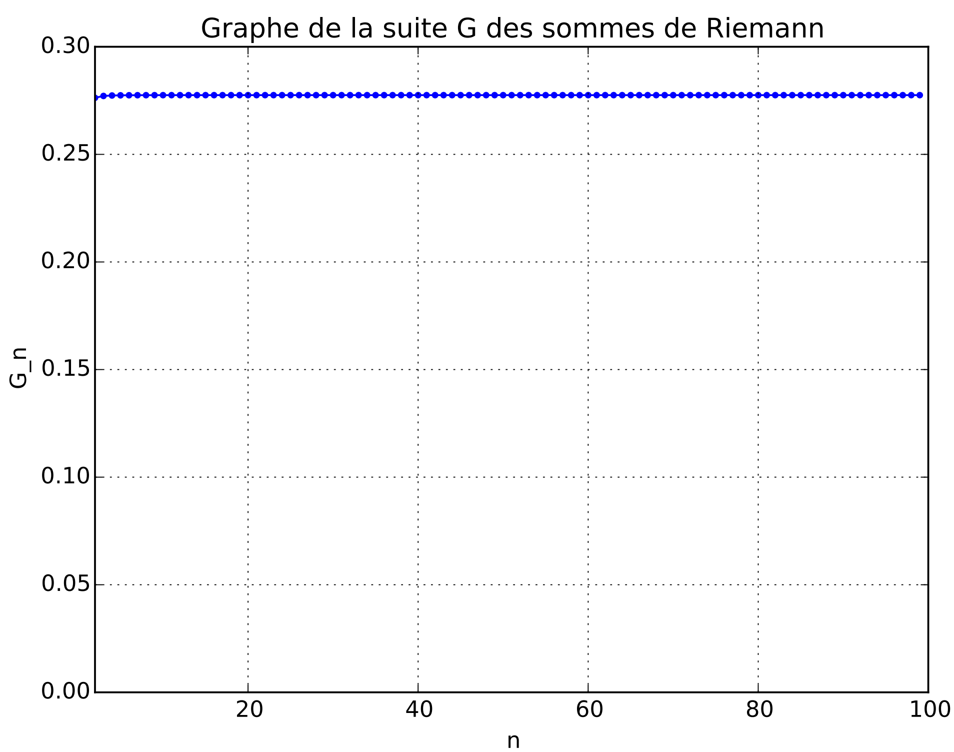
$$\begin{cases} x_0 & \overset{\text{déf}}{=} 1 \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], x_k & \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{k\pi} \\ x_n & \overset{\text{déf}}{=} 0 \\ \forall k \in [\![0, n-2]\!], \xi_k & \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\pi/2+k\pi} \\ \xi_{n-1} & \overset{\text{déf}}{=} 0 \end{cases}$$

les sommes de Riemann

$$\mathrm{G}_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n}(x_{k-1}-x_k)g\left(\xi_{k-1}\right) = (1-1/\pi)\frac{4}{\pi^2}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\pi k(k-1)(\pi/2+k\pi)^2}$$

ne convergent pas vers

$$\int_0^1 g = \lim_{\epsilon \to 0+} \left[x\cos(1/x)\right]_\epsilon^1 = \cos(1) \approx 0.54030230586$$

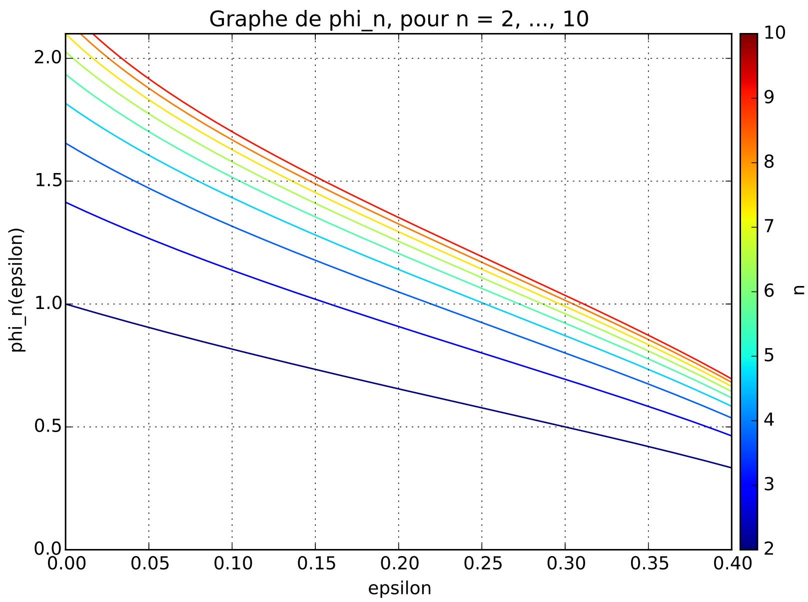


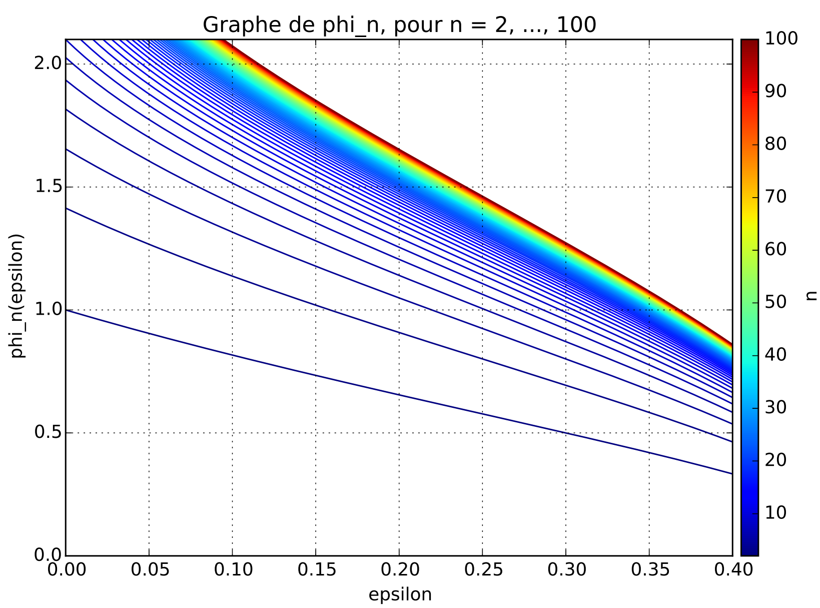
[Pour les 5/2] Sur le Théorème de Dini :

En posant

$$\forall n \geqslant 2, \phi_n \overset{\text{déf}}{=}]0,1/3] \to \mathbb{R}, \epsilon \mapsto \frac{1-2\epsilon}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k(1-2\epsilon)}{n}(1-\frac{k(1-2\epsilon)}{n})}}$$

la question se ramène à un problème de permutation de limites[a], pour la résolution duquel l'apparente croissance de $(\phi_n)_{n\geqslant 2}$ peut nous inviter à tenter d'appliquer le théorème de DINI.





Mais - à l'instar du souci qu'on a eu avec les sommes de Riemann - la non compacité de l'espace de départ est prompte à nous refroidir... ☹

a. $\lim_{\epsilon\to 0+} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \phi_n(\epsilon)}_{=\int_\epsilon^{1-\epsilon} f} \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0+} \phi_n(\epsilon)}_{=S_n}$

Exercice - 24 - X (partiel) juin 2010 Pierre Cagne

Calculer

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

Solution. C'est l'évaluation en -1 de $P \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = (-1)^{n-1}\frac{X^n-1}{X-1}$, qui vaut donc

$$\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Exercice - 26 - CCP, puis Mines 2000 - 2007

Résoudre, dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, l'équation

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution.

Par l'absurde : supposons qu'il existe une telle matrice M. Il vient : $M^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = 0$ donc M est nilpotente.
Or, l'indice de nilpotence de M est inférieur à [20] 3.
Donc

$$0 = M^3 = (M^3)\,M = M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est absurde. □

Exercice - 30 - Mines (partiel) 2010 Thibault Manneville *puis* CCP 2015 Taha El Hajji

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$(X+4)\,P(X) = X\,P(X+1)$$

Solution.

— Analyse :
Si $P \in \mathbb{R}[X]$ convient, alors en évaluant l'identité de l'énoncé - notée ⊛ - en 0, il vient :

$$P(0) = 0$$

D'où, en évaluant ⊛ en $-1, -2, -3$:

$$P(-3) = P(-2) = P(-1) = 0$$

20. puisque l'application linéaire canoniquement associée à M est un élément nilpotent de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ **Note du prof de maths : Younesse utilise évidemment le théorème que j'ai démontré aux 3/2 le 25 juin et dont vous possédez plusieurs démonstrations.**

Donc P est un multiple de $\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)$, et il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)\,\mathrm{Q}$$

Par suite :

$$\begin{array}{rl} & (\mathrm{X}+4)\,\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\,\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \\ \Rightarrow & (\mathrm{X}+4)(\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+1)\mathrm{X}\,\mathrm{Q} = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}+4)\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) \\ \Rightarrow & \mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) \end{array}$$

Donc $\mathrm{Q}-\mathrm{Q}(0)$ est nul [21], et Q est constant.

— SYNTHÈSE :
Réciproquement, s'il existe un réel α tel que $\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} \alpha\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)$, P convient.

Donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \{\alpha\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)\}_{\alpha\in\mathbb{R}}}$$

□

Exercice - 28 - X 2000 - 2007

On considère un ensemble fini E muni d'une loi associative notée multiplicativement.
Montrer que E,possède un élément idempotent, autrement dit :

$$\exists x \in \mathrm{E};\ x^2 = x$$

Solution. E est loisiblement non vide [22], et il existe $x_0 \in \mathrm{E}$. On pose [23]

$$\Psi \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{N}^* & \to \mathrm{E} \\ k & \mapsto x_0^k \end{array} \right.$$

La non injectivité [24] de Ψ assure l'existence de deux entiers distincts strictement positifs m et n tels que $m < n$ et

$$x_0^m = x_0^n$$

On pose $k \overset{\text{déf}}{=} n - m \geqslant 1$. Il vient, pour tout entier $r \geqslant m$:

$$\begin{cases} x_0^{r+k} & \overset{\text{associativité}}{=} x_0^{r-m}x_0^{m+k} = x_0^{r-m}x_0^n = x_0^{r-m}x_0^m = x_0^r \\ x_0^{r+2k} & \overset{\text{associativité}}{=} x_0^{r+k}x_0^k = x_0^r x_0^k = x_0^{r+k} = x_0^r \\ \forall l \in \mathbb{N}^*, x_0^{r+lk} & = x_0^r \quad \circledast \qquad \text{(par une récurrence immédiate)} \end{cases}$$

On applique $\circledast$ avec $r \overset{\text{déf}}{=} mk$ et $l \overset{\text{déf}}{=} m$, et :

$$x_0^{2mk} = x_0^{mk}$$

D'où, en posant $x \overset{\text{déf}}{=} x_0^{mk}$, le résultat est acquis. □

21. car il s'annule une infinité de fois
22. sinon la conclusion est fausse
23. $\mathrm{P}si$ est à valeurs dans E car E est stable par "multiplication"
24. si Ψ était injective, E serait de cardinal infini

Exercice - 49 - **Centrale (écrit!), puis Mines** 2005 - 2006

Si z est racine de $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}_n[X] \setminus \mathbb{C}_{n-1}[X]$, et $M \overset{\text{déf}}{=} \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \left|\frac{a_j}{an}\right|$ alors $|z| \leqslant M+1$

Solution.

Cas 1 : $|z| > 1$
Alors[25] $z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} = 0$, d'où : $z^n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} - \cdots - \frac{a_1}{a_n} z - \frac{a_0}{a_n}$, et :

$$\begin{aligned}
|z|^n &\overset{\text{IT}}{\leqslant} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |z|^{n-1} + \cdots + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| |z| + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \\
&\leqslant M\left(|z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1\right) \\
&\overset{|z| \neq 1}{\leqslant} M \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \\
&\leqslant M\,|z|^{n-1} \frac{|z| - 1/|z|^{n-1}}{|z| - 1} \\
&\overset{|z|^{n-1} \geqslant 1}{\leqslant} M\,|z|^{n-1}
\end{aligned}$$

Donc, en divisant par $|z|^{n-1} > 0$,

$$|z| \leqslant M \leqslant M+1$$

— Cas 2 : $|z| \leqslant 1$
Le résultat est immédiat, puisque $M \geqslant 0$.

Donc dans tous les cas :

$$\boxed{|z| \leqslant M+1}$$

Un peu mieux

On a même[a] montré que $|z| \leqslant \max(M, 1)$

a. puisque dans le premier cas : $|z| \leqslant M$ et dans le second : $|z| \leqslant 1$

□

Exercice - 59 - **Bac S (écrit)** 2003

Montrer que $7 | a^2 + b^2 \iff 7 | a \wedge b$.

Solution.

25. a_n est non nul, puisque $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}_n[X] \setminus \mathbb{C}_{n-1}[X]$

Un tableau de congruence modulo 7 montre que la somme de deux carrés vaut $0 \pmod 7$ si, et seulement si :

$$a, b = 0 \pmod 7$$

i.e (en notant v_7 la valuation 7-adique) :

$$v_7(a), v_7(b) > 0$$

i.e

$$v_7(a \wedge b) = \min(v_7(a), v_7(b)) > 0$$

soit :

$$7 | a \wedge b$$

et le résultat est acquis.

Tableau de congruence modulo 7						
x	0	2	3	4	5	6
x^2	0	4	2	2	4	1

□

Exercice - 60 - **ENSI (M) et *alii*** 1990

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $f^3 = f$, montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$$

Solution.
Il suffit de montrer que $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$, puisque le *théorème du rang* assure que :

$$\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

C'est le cas, puisque si $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$, il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} x & = f(y) \\ f(x) & = 0 \end{cases}$$

Par suite :

$$0 = f(0) = f^2(x) = f^3(y) \overset{f^3=f}{=} f(y) = x \quad \circledast$$

d'où :

$$\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$$

A propos de $f^3 = f$

— Le "3" de $f^3 = f$ n'a rien à voir avec le "3" de la dimension de $\mathbb{R}^3$.
En fait, la conclusion est vraie[a] pour tout endomorphisme f tel que $f^n = f$, avec $n \geqslant 2$.

— Le fait que $n = 3$ ne soit pas "optimal" (en minimalité) vient du fait qu'on ait[b] artificiellement pris l'image par f de

$$0 = f(x) = f^2(y)$$

— Pour $n > 3$, il suffit de prendre l'image par f^{n-3} de l'égalité[c] $0 = f^3(y)$, pour conclure de la même manière.

a. en dimension finie, si on se contente de reprendre la démonstration précédente.
b. en $\circledast$
c. établie en $\circledast$

□

Exercice - 61 - **ENS** 2006 **Frédéric Delacour**

Si n est un entier naturel, on considère l'ensemble des décompositions de n en sommes d'entiers naturels :

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

Trouver la décomposition telle que le produits des x_i soit maximal.

Solution.

$\square$

Exercice - 70 - **CM 2, puis Mines (partiel)** 2012

Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)}$$

Cet exercice est signalé, par Vladimir Arnol'd, comme un exemple illustrant la décadence qui conduit de « lumières » à aujourd'hui. Il affirme que Barrow, Newton and Huygens would have solved it in a few minutes but present-day mathematicians are not, my opinion, capable of solving it quickly ! The only exception I know – Gerd Faltings – proves the rule.

Solution. On pose $\forall x \in]0,1]$, $f(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)}$

On va utiliser les DL(0) à l'ordre[26] 7 de $\sin, \tan, \arcsin, \arctan$:

$$\begin{cases} \sin x & \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{7!} + o(x^7) \\ \tan x & \underset{x \to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o(x^7) \\ \arcsin x & \underset{x \to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \dfrac{5x^7}{112} + o(x^7) \\ \arctan x & \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7) \end{cases}$$

26. Retroussez vos manches !

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\tan x - \frac{\tan^3 x}{6} + \frac{\tan^5 x}{120} - \frac{\tan^7 x}{7!} - \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{15} - \frac{17\sin^7 x}{315} + o(x^7)}{\arctan x + \frac{\arctan^3 x}{6} + \frac{3\arctan^5 x}{40} + \frac{5\arctan^7 x}{112} - \arcsin x + \frac{\arcsin^3 x}{3} - \frac{\arcsin^5 x}{5} + \frac{\arcsin^7 x}{7} + o(x^7)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^5 - \frac{x^7}{7!} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 - \frac{2}{15}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^5 - \frac{17x^7}{315} + o(x^7)}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^5 + \frac{5x^7}{112} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^5 + \frac{x^7}{7} + o(x^7)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3})x^3 + (\frac{2}{15} - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{120} + \frac{1}{6} - \frac{2}{15})x^5 + (\frac{17}{315} - \frac{1}{2}(\frac{2}{15} + \frac{1}{9}) + \frac{1}{24\times 3} - \frac{1}{36} - \frac{1}{120} + \frac{1}{9} - \frac{17}{315})x^7 + o(x^7)}{(\frac{-1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3})x^3 + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{3}{40} - \frac{3}{40} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5})x^5 + (\frac{-1}{7} + \frac{1}{2}(\frac{1}{9} + \frac{1}{5}) - \frac{1}{8} + \frac{1}{36} + \frac{3}{40} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7})x^7 + o(x^7)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3})x^3 + (\frac{2}{15} - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{120} + \frac{1}{6} - \frac{2}{15})x^5 + (\frac{17}{315} - \frac{1}{2}(\frac{2}{15} + \frac{1}{9}) + \frac{1}{24\times 3} - \frac{1}{36} - \frac{1}{120} + \frac{1}{9} - \frac{17}{315})x^7 + o(x^7)}{(\frac{-1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3})x^3 + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{3}{40} - \frac{3}{40} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5})x^5 + (\frac{-1}{7} + \frac{1}{2}(\frac{1}{9} + \frac{1}{5}) - \frac{1}{8} + \frac{1}{36} + \frac{3}{40} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7})x^7 + o(x^7)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{-1}{30}x^7 + o(x^7)}{\frac{-1}{30}x^7 + o(x^7)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)} = 1}$$

A propos de *the only exception*

Après l'effort, le réconfort ! Quid de l'affirmation d'Arnol'd : "`present-day mathematicians are not, my opinion, capable of solving it quickly! The only exception I know -` Gerd Faltings `- proves the rule`" ?
Apparemment, Arnol'd avait posé cet exercice dans une conférence à Princeton, il y a une trentaine d'années. J'ai mis de côté ce commentaire croustillant d'un membre de mathoverflow, qui relate les faits :

"`I heard this story from Dinesh Thakur several years ago. This is what he told me. When Arnold posed this question, Faltings immediately said 1. After the talk somebody complimented Faltings on his quickness, and Faltings replied that what immediately came to mind was that the answer had to be either 0 or 1. Since 1 was a more interesting answer, he went with that.`" ☺[a]

a. Apprécions la modestie de Faltings !

□

Exercice - 72 - ENS ULC 2011 - 2015

On considère une $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$ où $p > n$.

On s'intéresse au système linéaire diophantien : $AX = 0_{\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{Z})}$.

1 Calculer, en fonction de A, un $R > 0$ tel que l'on soit certain de trouver une solution non-triviale : X telle que $\|X\|_\infty \leqslant R$.

2 Vous pourriez finalement montrer que le nombre

$$R \overset{\text{déf}}{=} (p\|A\|_\infty)^{\frac{n}{p-n}}$$

convient !

Solution.
Soit $R \in \mathbb{N}^*$.
On pose $A \overset{\text{déf}}{=} (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$

On veut pouvoir assurer l'existence d'une solution (non triviale) dans la boule $B_{\|.\|_\infty}(0, R)$.

— *Méthode 1 :*
On pose [27]

$$\phi \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^n,\ X \mapsto AX$$

— $\phi|_{[\![-R,R]\!]^p}$ est à valeurs dans $[\![-pR\|A\|_\infty, pR\|A\|_\infty]\!]^n$:
En effet : Pour tout $X \overset{\text{déf}}{=} (x_1, \cdots, x_p) \in [\![-R, R]\!]^p$,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |[AX]_i| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_{ik} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |a_{ik} x_k| \leqslant \|A\|_\infty \sum_{k=1}^{p} |x_k| \leqslant \|A\|_\infty pR$$

Une condition suffisante de non injectivité de $\phi|_{[\![-R,R]\!]^p}$ corestreinte à $[\![-pR\|A\|_\infty, pR\|A\|_\infty]\!]^n$ est que le cardinal d'une partie de l'ensemble de départ soit strictement supérieur au cardinal de l'ensemble d'arrivée, soit :

— **Approche 1** [28] **:**

$$(2R)^p > (2Rp\|A\|_\infty + 1)^n$$

ce qui sera a fortiori [29] le cas si :

$$(2R)^p > (2Rp\|A\|_\infty + 2R)^n$$

i.e :

$$R > \frac{1}{2}(p\|A\|_\infty + 1)^{\frac{n}{p-n}}$$

— **Approche 2** [30] (pour retomber sur le rayon de l'énoncé) :

$$(2R + 1)^p > (2Rp\|A\|_\infty + 1)^n$$

ce qui sera a fortiori le cas si [31] :

$$(2R + 1)^p > ((2R + 1)p\|A\|_\infty)^n$$

27. on confondra, à partir de maintenant, $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{Z})$ (resp. $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$) et $\mathbb{Z}^p$ (resp $\mathbb{Z}^n$), par commodité d'écriture
28. la partie en question est $([\![-R, R]\!] \backslash \{0\})^p$, de cardinal $(2R)^p$
29. car $R \geqslant 1$
30. la partie est l'ensemble de départ entier, de cardinal $(2R + 1)^p$
31. On peut loisiblement supposer que $p\|A\|_\infty \geqslant 1$, sinon A est identiquement nulle, et n'importe quel rayon entier strictement positif conviendra.

i.e :

$$2\mathrm{R}+1 > (p\|\mathrm{A}\|_\infty)^{\frac{n}{p-n}}$$

i.e :

$$\mathrm{R} > \frac{1}{2}(p\|\mathrm{A}\|_\infty)^{\frac{n}{p-n}} - \frac{1}{2}$$

et enfin [32] :

$$\mathrm{R} \geqslant \frac{1}{2}(p\|\mathrm{A}\|_\infty)^{\frac{n}{p-n}}$$

Ladite non injectivité permet de conclure, puisqu'elle assure l'existence de deux vecteurs $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in [\![-\mathrm{R}, \mathrm{R}]\!]^p$ distincts tels que $\mathrm{AX} = \mathrm{AY}$.
En posant $\mathrm{Z} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{X} - \mathrm{Y} \neq 0$, $\mathrm{AZ} = 0$ et $\mathrm{Z} \in [\![-\mathrm{R}, \mathrm{R}]\!]^p$.

— *Méthode 2 (M.Guelfi) :*
Pour tout $\mathrm{X} \overset{\text{déf}}{=} (x_1, \cdots, x_p) \in [\![-\mathrm{R}, \mathrm{R}]\!]^p$,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ -\mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^- \leqslant [\mathrm{AX}]_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}x_k \leqslant \mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^+$$

Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $[\mathrm{AX}]_i \in [\![-\mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^-, \mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^+]\!]$, d'où :

$$\mathrm{AX} \in \prod_{i=1}^{n} [\![-\mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^-,\ \mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^+]\!]$$

peut prendre

$$\operatorname{card}\left(\prod_{i=1}^{n} [\![-\mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^-,\ \mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^+]\!]\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^- + \mathrm{R}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^+ + 1\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\mathrm{R}\underbrace{\sum_{k=1}^{p} |a_{ik}|}_{\text{noté } \Lambda_i} + 1\right)$$

valeurs possibles.
Donc la fonction

$$[\![-\mathrm{R}, \mathrm{R}]\!]^p \to \mathbb{Z}^n,\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$$

peut être corestreinte à un ensemble de cardinal $\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{R}\Lambda_i + 1)$

De la même manière que précédemment, une condition suffisante de non injectivité de cette fonction corestreinte est que le cardinal d'une partie [33] de l'ensemble de départ soit strictement supérieur au cardinal de l'ensemble d'arrivée, i.e :

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{R}\Lambda_i + 1) < (\mathrm{R}+1)^p \qquad \circledast$$

— **Approche 1** (pour retomber sur le rayon de l'énoncé) :
Or :

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{R}\Lambda_i + 1) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{R}p\|\mathrm{A}\|_\infty + 1) \leqslant \prod_{i=1}^{n} ((\mathrm{R}+1)p\|\mathrm{A}\|_\infty) \leqslant ((\mathrm{R}+1)p\|\mathrm{A}\|_\infty)^n$$

donc avoir $((\mathrm{R}+1)p\|\mathrm{A}\|_\infty)^n < (\mathrm{R}+1)^p$, i.e : $\mathrm{R} > (p\|\mathrm{A}\|_\infty)^{\frac{n}{p-n}} - 1$, suffit [34].

32. car R est entier
33. $[\![0, \mathrm{R}]\!]^p$, cette fois
34. à assurer, via $\circledast$, la non injectivité de la fonction précédemment posée.

— **Approche 2** (pour faire mieux que le rayon de l'énoncé) :
Or :

$$\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{R}\Lambda_i+1)\leqslant\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{R}\Lambda_i+\Lambda_i)\leqslant(\mathrm{R}+1)\prod_{i=1}^{n}\Lambda_i$$

donc avoir $(\mathrm{R}+1)\prod_{i=1}^{n}\Lambda_i<(\mathrm{R}+1)^p$, i.e : $\mathrm{R}>\left(\prod_{i=1}^{n}\Lambda_i\right)^{\frac{1}{p-1}}-1$, suffit.

On conclut de la même manière que dans la *Méthode 1*.

Sur l'existence de solutions non triviales

Remarquons que la dimension, dans[a] $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, de l'espace des solutions est celle de l'intersection de n hyperplans, soit $p-n>0$.
Il y a donc nécessairement des solutions non triviales dans $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Mais ces considérations d'algèbre linéaire ne permettent pas de rendre compte de la situation "arithmétique" dans laquelle on se trouve.

a. on "plonge" $\mathbb{Z}$ dans le corps $\mathbb{R}$, qui nous permet de profiter de l'algèbre linéaire.

□

Exercice - 38 - ENS Ulm-Lyon-Cachan (partiel) 2009 Loïc Schwaller

Exercice 1 :
Soit f une fonction réelle 1−lipschitzienne de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Soit $\mathrm{F}\overset{\text{déf}}{=}\{x\in[0,1]\mid f(x)=x\}$.

1 Montrer que F est un intervalle fermé.

2 Si $g\in\mathrm{C}^0([0,1])$ et si f et g commutent, montrer qu'elles possèdent un point fixe commun.

Solution.

1 — F est fermé :

— **Méthode 1** : Montrons que pour toute suite u d'éléments de F qui converge vers $l\in\mathbb{R}$, $l\in\mathrm{F}$:
Soit u une telle suite.
Par continuité de f :

$$f(l)=\lim_{n\to\infty}f(u_n)\overset{u_n\text{ est point fixe de }f}{=}\lim_{n\to\infty}u_n=l$$

donc l est point fixe de f, et $l\in\mathrm{F}$.

— **Méthode 2 [Pour les 5/2] :** $\mathrm{F}=\left(f-\mathrm{id}_{[0,1]}\right)^{-1}\{0\}$ est fermé par continuité de $f-\mathrm{id}_{[0,1]}$.

— F est un intervalle, i.e une partie convexe :
En effet :
Comme $\mathrm{F}\subset[0,1]$ est non vide[35] et bornée, F admet une borne inférieure (resp. supérieure) notée x (resp. y). Par fermeture de F, x (resp. y) est un minimum[36] (resp. maximum).

Soit $\lambda\in[0,1]$. On pose $z\overset{\text{déf}}{=}(1-\lambda)x+\lambda y$.

- Comme f est 1-lipschitzienne :

$$|f(z)-f(x)|\leqslant|z-x|=z-x=\lambda(y-x)$$

d'où :

$$f(z)\in[f(x)-\lambda(y-x),f(x)+\lambda(y-x)]\overset{f(x)=x}{=}[x-\lambda(y-x),x+\lambda(y-x)]=[x-\lambda(y-x),z]$$

35. Comme $f\in\mathrm{C}^0([0,1],[0,1])$, f admet un point fixe sur $[0,1]$, par application du TVI à la fonction continue $f-\mathrm{id}_{[0,1]}$ entre 0 et 1
36. Par définition de x, il existe une suite u d'éléments de F tendant vers x : la fermeture de F assure que $x=\lim u\in\mathrm{F}$

- De même :

$$f(z) \in [f(y)-(1-\lambda)(y-x), f(y)+(1-\lambda)(y-x)] \overset{f(y)=y}{=} [y-(1-\lambda)(y-x), y+(1-\lambda)(y-x)]$$
$$= [z, y+(1-\lambda)(y-x)]$$

Donc
$$f(z) \in [x-\lambda(y-x), z] \cap [z, y+(1-\lambda)(y-x)] = \{z\}$$
et $f(z) = z$, d'où $z \in \mathrm{F}$.

Nous avons montré que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $z \overset{\text{déf}}{=} (1-\lambda)x + \lambda y \in \mathrm{F}$, c'est-à-dire que pour tout $z \in [\min(\mathrm{F}), \max(\mathrm{F})]$, $z \in \mathrm{F}$: i.e F est convexe.

2 Soit $g \in \mathrm{C}^0([0,1])$ telle que $f \circ g = g \circ f$.

— $g(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$:
En effet : Si $\omega \in \mathrm{F}$:
$$f(\omega) = \omega$$
d'où, en en prenant l'image par g :
$$f(g(\omega)) = g(f(\omega)) = g(\omega)$$
et, comme $g(\omega)$ est point fixe de f :
$$g(\omega) \in \mathrm{F}$$

— Comme $g(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$,
$$\begin{cases} g_{|\mathrm{F}}(x) & \geqslant x = \min(\mathrm{F}) \\ g_{|\mathrm{F}}(y) & \leqslant y = \max(\mathrm{F}) \end{cases}$$
d'où $g_{|\mathrm{F}} - \mathrm{id}_{|\mathrm{F}} = g_{|\mathrm{F}} - f_{|\mathrm{F}}$ change de signe entre x et y, et le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $g_{|\mathrm{F}} - f_{|\mathrm{F}}$ sur le segment $\mathrm{F} = [x,y]$, assure l'existence d'un $\omega \in \mathrm{F}$ tel que :
$$g_{|\mathrm{F}}(\omega) - f_{|\mathrm{F}}(\omega) = 0$$
soit :
$$g(\omega) = f(\omega) \overset{\omega \in \mathrm{F}}{=} \omega$$

□

Exercice - 40 - Centrale 2002

Quel est le sous-groupe de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qu'engendrent les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Solution. On note $(\mathrm{H}, +) \overset{\text{déf}}{=} (\langle \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rangle, +)$ le sous-groupe de $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), +)$ engendré par les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Montrons que $\mathrm{H} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:

— $\mathrm{H} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est clair.

— $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{H}$:
En effet : Si

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ni \mathrm{A} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & a_2 & & (*') & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (*) & & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

alors, sans perte de généralité [37], si $a_1, a_2, \cdots, a_r$ sont nuls et $a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_n$ sont non nuls :

$$\mathrm{H} = \langle \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rangle \ni \mathrm{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \text{(0)} & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \text{(*)} & & \frac{a_{r+1}}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{a_n}{2} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \ddots & & & \text{(*')} & \vdots \\ \vdots & & -1 & & & \vdots \\ \vdots & \text{(0)} & & \frac{a_{r+1}}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a_n}{2} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

□

Exercice - 41 - Centrale 2008

Quel est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qu'engendrent les matrices nilpotentes ?

Solution.
On note $\mathfrak{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de nilpotentes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et on pose $\mathrm{A}_n \overset{\text{déf}}{=} \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0\}$
Montrons que $\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle = \mathrm{A}_n$:

— A_n est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:
En effet :
  — $\mathrm{A}_n \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
  — $0 \in \mathrm{A}_n \neq \emptyset$
  — Pour tous $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{A}_n, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \mathrm{Tr}(\alpha \mathrm{M} + \mathrm{N}) = \alpha\, \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) + \mathrm{Tr}(\mathrm{N}) = 0,$ d'où : $\alpha \mathrm{M} + \mathrm{N} \in \mathrm{A}_n$

— $\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle \subset \mathrm{A}_n$:
Comme A_n est un espace vectoriel, il suffira de montrer que $\mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{A}_n$:
  — **Méthode 1 :**
  Par récurrence sur $n \geqslant 1$: $\mathrm{H}(n)$: "$\forall \mathrm{N} \in \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(\mathrm{N}) = 0$" :
    - **Initialisation :** $\mathrm{H}(1)$ est claire, puisque la seule matrice nilpotente de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ est (0).
    - **Hérédité :** Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{H}(n)$, $\mathrm{N} \in \mathfrak{N}_{n+1}(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à N.
    Comme [38] N n'est pas inversible, il existe un vecteur non nul $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
    On complète [39] (x) en une base $\mathrm{B} \overset{\text{déf}}{=} (x, x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, et il existe $\mathrm{L} \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{N}' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
    $$\mathcal{M}(u, \mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{L} \\ 0 & \mathrm{N}' \end{pmatrix}$$
    Comme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ est nilpotent :
    $$0 = (\mathcal{M}(u, \mathrm{B}))^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{L}(\mathrm{N}')^n \\ 0 & (\mathrm{N}')^{n+1} \end{pmatrix}$$
    d'où $(\mathrm{N}')^{n+1} = 0$, et $\mathrm{N}' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente. Donc
    $$\mathrm{Tr}(\mathrm{N}') = \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}(u, \mathrm{B})) = 0 + \mathrm{Tr}(\mathrm{N}') \overset{\text{HR}}{=} 0$$
    et $\mathrm{H}(n+1)$ est acquis.

37. une rédaction plus rigoureuse (mais inutilement lourde) consisterait à noter $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ les coefficients diagonaux nuls
38. Sinon il existerait $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{NM} = \mathrm{MN} = \mathrm{I}_{n+1}$, et $0 = 0\,\mathrm{M}^{n+1} = \mathrm{N}^{n+1}\mathrm{M}^{n+1} = (\mathrm{NM})^{n+1} = \mathrm{I}_{n+1}$, ce qui serait absurde.
39. par le théorème de la base incomplète

— **Méthode 2 [Pour les 5/2] :** Si $N \in \mathfrak{N}_n(\mathbb{R})$: comme polynôme caractéristique X^n de N est scindé, en trigonalisant N, N est semblable à une matrice triangulaire stricte, d'où $\mathrm{Tr}(N) = 0$.

Donc $\mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \subset A_n$, et, par suite, $\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle \subset A_n$.

— $A_n \subset \langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle$:

— **Lemme**

Toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

En effet : Par récurrence sur $n \geqslant 1$: $H(n)$: "Pour toute $M \in A_n$, M est semblable à une matrice de diagonale nulle."

- **Initialisation :** $H(1)$ est claire.
- **Hérédité :** Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$, $M \in A_{n+1}$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

— *Cas 1 : u est une homothétie de rapport λ.*
Alors $0 = \mathrm{Tr}(u) = (n+1)\lambda$, d'où $\lambda = 0$, et $u = 0$.

— *Cas 2 : u est n'est pas une homothétie.*
Alors il existe un vecteur non nul x tel que $(x, u(x))$ soit libre.

On complète $(x, u(x))$ en une base $B \overset{\text{déf}}{=} (x, u(x), x_1, \cdots, x_{n-1})$ de $\mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, et il existe $L \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $M' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\mathcal{M}(u, B) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 1 & \\ 0 & M' \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Donc $0 = \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}(u, B)) = 0 + \mathrm{Tr}(M') = \mathrm{Tr}(M')$, et l'hypothèse de récurrence appliquée à $M' \in A_n$ fournit une matrice $P' \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice D' à diagonale nulle telles que

$$M' = P'D'(P')^{-1}$$

Donc en posant $P \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $D \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & L \\ 1 & \\ 0 & D' \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{M}(u, B) = PDP^{-1}$$

D'où, en notant Q la matrice de passage de la base canonique à la base B,

$$M = Q\,\mathcal{M}(u, B)\,Q^{-1} = (QP)\,D\,(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)\,D\,(QP)^{-1}$$

est semblable à la matrice de diagonale nulle D.

Dans tous les cas, $H(n+1)$ est acquis.

— Soit $M \in A_n$.
D'après le lemme précédent, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale nulle telles que

$$M = PDP^{-1}$$

Comme D est à diagonale nulle, D est de la forme $T_- + T_+$, où T_- (resp. T_+) est triangulaire inférieure (resp. supérieure) stricte.
Donc

$$\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle \ni M = \underbrace{P(T_-)P^{-1}}_{\in \mathfrak{N}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{P(T_+)P^{-1}}_{\in \mathfrak{N}_n(\mathbb{R})}$$

d'où $\mathrm{A}_n \subset \langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle$.
Donc

$$\boxed{\langle \mathfrak{N}_n(\mathbb{R}) \rangle = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0\}}$$

□

Exercice - 42 - **Centrale** 2008

1 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contient-il des droites affines ?

2 Et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Solution. $\mathbb{K} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Si

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \ni \mathrm{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\mathrm{D} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{I}_n + \langle \mathrm{A} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{\alpha \in \mathbb{K}}$$

est une droite affine incluse dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (et même dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$).

Condition nécessaire quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si $\mathrm{D} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{M}_0 + \langle \mathrm{M} \rangle$ est une droite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \mathrm{M} + \mathrm{M}_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha \mathrm{M} + \mathrm{M}_0| \neq 0$$

d'où le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) \stackrel{\text{déf}}{=} |\mathrm{XM} + \mathrm{M}_0|$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, ce qui n'est possible que[a] si $\deg(\mathrm{P}) = 0$.

a. à cause du théorème de d'Alembert

□

Exercice - 68 - **Centrale** 2005 - 2008

1 Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(y)+\mathrm{E}(x+y) \leqslant \mathrm{E}(2x)+\mathrm{E}(2y)$ où E désigne la fonction partie entière.

2 On définit

$$f_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{Z} \\ x & \mapsto \mathrm{E}(\frac{x}{\alpha}) \end{array} \right. \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{N}^*$$

2.1 Montrer que $f_\alpha \circ \mathrm{E} = f_\alpha$

2.2 Montrer que $\forall (\alpha,\beta) \in (\mathbb{N})^2$, $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha\beta}$

2.3 Montrer que si p est un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1} \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

3 Montrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^*, \ \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}$$

Solution.

1 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
On pose

$$r \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to [0,1[\\ x & \mapsto x - \mathrm{E}(x) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}(2x)+\mathrm{E}(2y)-\mathrm{E}(x)-\mathrm{E}(y)-\mathrm{E}(x+y) \geqslant 0 \\ \iff \ & 2x - r(2x) + 2y - r(2y) - x + r(x) - y + r(y) - (x+y) + r(x+y) \geqslant 0 \\ \iff \ & \underbrace{r(x)+r(y)+r(x+y)-r(2x)-r(2y)}_{\overset{\text{déf}}{=} g(x,y)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Or :

Signe de $g(x,y)$ par disjonction des cas						
Si	$\mathrm{X} \overset{\text{déf}}{=} r(x) \in$	$\mathrm{Y} \overset{\text{déf}}{=} r(y) \in$	$r(x+y) =$	$r(2x) =$	$r(2y) =$	$g(x,y) =$
	$[0,1/2[$	$[0,1/2[$	$\mathrm{X}+\mathrm{Y}$	$2\mathrm{X}$	$2\mathrm{Y}$	0
	$[1/2,1[$	$[1/2,1[$	$\mathrm{X}+\mathrm{Y}-1$	$2\mathrm{X}-1$	$2\mathrm{Y}-1$	1
$\mathrm{X}+\mathrm{Y}<1$	$[0,1/2[$	$[1/2,1[$	$\mathrm{X}+\mathrm{Y}$	$2\mathrm{X}$	$2\mathrm{Y}-1$	1
$\mathrm{X}+\mathrm{Y}<1$	$[1/2,1[$	$[0,1/2[$	$\mathrm{X}+\mathrm{Y}$	$2\mathrm{X}-1$	$2\mathrm{Y}$	1
$\mathrm{X}+\mathrm{Y}\geqslant 1$	$[0,1/2[$	$[1/2,1[$	$\mathrm{X}+\mathrm{Y}-1$	$2\mathrm{X}$	$2\mathrm{Y}-1$	0
$\mathrm{X}+\mathrm{Y}\geqslant 1$	$[1/2,1[$	$[0,1/2[$	$\mathrm{X}+\mathrm{Y}-1$	$2\mathrm{X}-1$	$2\mathrm{Y}$	0

Donc dans tous les cas, $g(x,y) \geqslant 0$, et le résultat est acquis.

2

2.1 Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.
Montrons que $(f_\alpha \circ \mathrm{E})(x) = f_\alpha(x)$, i.e $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(x)}{\alpha}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right) &= \frac{x}{\alpha} - r\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}(x)+r(x)}{\alpha} - r\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}(x)}{\alpha} - \underbrace{\left(r\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{r(x)}{\alpha}\right)}_{\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{R}}
\end{aligned}$$

Montrons que $0 \leqslant \mathrm{R} < 1$:

— $\mathrm{R} < 1$:
En effet :

$$\begin{cases} r\left(\frac{x}{\alpha}\right) & < 1 \\ -\frac{r(x)}{\alpha} & \leqslant 0 \qquad (\text{car } -r(x) \leqslant 0 \text{ et } \alpha > 0) \end{cases}$$

donc $\mathrm{R} = r\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{r(x)}{\alpha} < 1$

— $\mathrm{R} \geqslant 0$, i.e $r\left(\frac{x}{\alpha}\right) \geqslant \frac{r(x)}{\alpha}$:
En effet :

$$\begin{aligned}
& r\left(\frac{x}{\alpha}\right) \geqslant \frac{r(x)}{\alpha} \\
\overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow}\quad & \alpha\, r\left(\frac{x}{\alpha}\right) \geqslant r(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & \alpha\left(\frac{x}{\alpha} - \mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \geqslant x - \mathrm{E}(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & x - \alpha\,\mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \geqslant x - \mathrm{E}(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{E}(x) \geqslant \alpha\,\mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

— **Lemme**

Pour tous réels a et b : $\mathrm{E}(a+b) \geqslant \mathrm{E}(a) + \mathrm{E}(b)$

Solution. Pour tous réels a et b :

$$\begin{cases} \mathrm{E}(a) & \leqslant a \\ \mathrm{E}(b) & \leqslant b \end{cases}$$

donc $\mathrm{E}(a)+\mathrm{E}(b) \leqslant a+b$, et l'entier $\mathrm{E}(a)+\mathrm{E}(b)$ est inférieur au plus grand entier inférieur à $a+b$, à savoir $\mathrm{E}(a+b)$ □

— D'après le lemme, et par une récurrence immédiate :

$$\mathrm{E}(x) = \mathrm{E}\left(\underbrace{\frac{x}{\alpha} + \cdots + \frac{x}{\alpha}}_{\alpha \text{ fois}}\right) \geqslant \underbrace{\mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \cdots + \mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}_{\alpha \text{ fois}} = \alpha\,\mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \qquad \circledast$$

Donc $\mathrm{R} \in [0,1[$, et l'entier $\mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\mathrm{E}(x)}{\alpha} - \mathrm{R}$ est, par définition [40], la partie entière de $\frac{\mathrm{E}(x)}{\alpha}$, d'où :

$$\mathrm{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(x)}{\alpha}\right)$$

40. ou plutôt : "par unicité de l'écriture, pour tout réel a, $a = \mathrm{E}(a) + b$ où $\mathrm{E}(a)$ est entier et $b \in [0,1[$", laquelle est exprimée par l'article défini dans la définition de *la* partie entière.

2.2
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f_\alpha \circ f_\beta = f_\alpha \circ (\mathrm{E} \circ \overset{\bullet}{\beta}) = (f_\alpha \circ \mathrm{E}) \circ \overset{\bullet}{\beta} \overset{2.1}{=} f_\alpha \circ \overset{\bullet}{\beta} = f_{\alpha\beta}$$

3 Soit p un nombre premier.

— **Lemme**

Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs à n dont la valuation p-adique est supérieure à k vaut $f_p^k(n)$.

On note, pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{A}_k(n)$ l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs à n dont la valuation p-adique est supérieure à k.

Par récurrence forte sur $k \geqslant 1$, $\mathrm{H}(k)$: "$\forall n \in \mathbb{N}, |\mathrm{A}_k(n)| = f_p^k(n)$" :

- **Initialisation :** Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $\mathrm{A}_1(n)$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs à n multiples de p :
  $$\mathrm{A}_1(n) = \left\{1\,p,\ 2\,p, \cdots, \mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\ p\right\}$$
  $\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\ p$ est le plus grand d'entre eux, car :
  — $\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\ p \leqslant \mathrm{E}(n) = n$ par 2.1.⊛
  — $\left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right) + 1\right)\ p > \left(\frac{n}{p}\right)\ p = n$
  Donc $|\mathrm{A}_1(n)| = \mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right) = f_p(n)$, et $\mathrm{H}(1)$ est acquis.
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{H}(k)$, $\mathrm{H}(k-1)$, $\cdots$, $\mathrm{H}(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $\mathrm{A}_{k+1}(n)$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs à n de valuation p-adique supérieure à k et dont le rapport par p^k est multiple de p :
  $$\mathrm{A}_{k+1}(n) = \left\{m \in [\![1,n]\!] \,\middle|\, v_p(m) \geqslant k \text{ et } p \,\middle|\, \frac{m}{p^k}\right\} = \left\{m \in \mathrm{A}_k(n) \,\middle|\, p \text{ divise } \frac{m}{p^k}\right\}$$

Donc $|\mathrm{A}_{k+1}(n)| = \left|\{m' \mid m' \text{ multiple de } p\}_{p^k m' \in \mathrm{A}_k(n)}\right|$ ⊛

Or,
$$\mathrm{A}_k(n) = \left\{1\,p^k,\ 2\,p^k, \cdots, |\mathrm{A}_k(n)|\,p^k\right\} \overset{\mathrm{HR}}{=} \left\{1\,p^k,\ 2\,p^k, \cdots, f_p^k(n)\,p^k\right\}$$

Donc, par ⊛,
$$\begin{aligned}
|\mathrm{A}_{k+1}(n)| &= \left|\left\{m' \in [\![1, f_p^k(n)]\!] \mid m' \text{ multiple de } p\right\}\right| \\
&= |\mathrm{A}_1(f_p^k(n))| && \left(\text{par définition de } \mathrm{A}_1\left(f_p^k(n)\right)\right) \\
&= f_p\left(f_p^k(n)\right) && (\text{par } \mathrm{H}(1)) \\
&= f_p^{k+1}(n)
\end{aligned}$$

et c'est $\mathrm{H}(k+1)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après le lemme :

- $f_p(n) = 1 \times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p est supérieure à 1".

- $f_p(n) + f_p^2(n) = 1\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p vaut 1"
  $+ 2\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p est supérieure à 2"

- $f_p(n) + f_p^2(n) + f_p^3(n) = 1\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p vaut 1"
  $+ 2\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p vaut 2"
  $+ 3\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p est supérieure à 3"

- Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

  $f_p(n) + f_p^2(n) + \cdots + f_p^k(n) = 1\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p vaut 1"
  $+ 2\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p vaut 2"
  $+ \cdots$
  $+ (k-1)\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p vaut $k-1$"
  $+ k\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p est supérieure à k"

Or : le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p est supérieure à n est nul[41], donc pour tout $k \geqslant n$:

$f_p(n) + f_p^2(n) + \cdots + f_p^k(n) = f_p(n) + f_p^2(n) + \cdots + f_p^n(n)$
$= 1\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p vaut 1"
$+ 2\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p vaut 2"
$+ \cdots$
$+ (n-1)\times$ "le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ dont v_p vaut $n-1$"

c'est donc la somme des valuations p-adiques des entiers naturels non nuls inférieurs à n, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} v_p(i) = v_p(n!)$$

On a montré que

$$\sum_{k\geqslant 1} f_p^k(n) = \sum_{k=1}^{n} f_p^k(n) = v_p(n!) \quad \circledast$$

Or :

$$\sum_{k\geqslant 1} f_p^k(n) \overset{2.1)}{=} \sum_{k\geqslant 1} f_{p^k}(n) = \sum_{k\geqslant 1} \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right)$$

Donc, par $\circledast$:

$$v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1} \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right)$$

4 Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{F} \overset{\text{déf}}{=} \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$.
En utilisant la décomposition en facteurs premiers du numérateur (entier naturel) et du dénominateur (entier naturel) de F, F s'écrit comme produit de facteurs premiers à exposants entiers **relatifs**.

41. par l'inégalité de Bernoulli : $p^n = (1+(p-1))^n \geqslant 1 + n(p-1) > n$

Or, pour tout nombre premier p :

$$v_p\left(\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}\right) = v_p\left((2m)!\right) + v_p\left((2n)!\right) - v_p(m!) - v_p(n!) - v_p\left((m+n)!\right)$$
$$= \sum_{k\geqslant 1}\left(\underbrace{\mathrm{E}\left(2\frac{m}{p^k}\right) + \mathrm{E}\left(2\frac{n}{p^k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m}{p^k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m+n}{p^k}\right)}_{\geqslant 0 \quad \text{(par 1.)}}\right)$$
$$\geqslant 0$$

Donc F s'écrit comme produit de facteurs premiers à exposants entiers **naturels**, et

$$\mathrm{F} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}$$

□

Exercice - 73 - **X** M_2 2014 **Salim Nibouche**

Si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))$ conserve le déterminant, T conserve le rang.

Solution. Par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}(n)$: "Si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))$ conserve le déterminant, T conserve le rang." :

- **Initialisation :** Claire pour $n = 1$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{H}(n), \mathrm{H}(n-1), \cdots, \mathrm{H}(1)$.
  On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Phi_k \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K} \\ \mathrm{M} & \mapsto \displaystyle\sum_{\mathrm{A}\in\mathcal{S}_k(\mathrm{M})} |\det(\mathrm{A})|, \text{où } \mathcal{S}_k(\mathrm{M}) \text{ est l'ensemble des sous-matrices de M d'ordre supérieur à } k \end{array} \right.$$

Il vient donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et toute $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{array}{rl} & \Phi_k(\mathrm{M}) = 0 \\ \Longleftrightarrow & \mathrm{rg}(\mathrm{M}) < k \end{array}$$

D'où : $\Phi_k^{-1}(\{0\}) = \{\mathrm{M}' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg}(\mathrm{M}') \leqslant k-1\}$ $\circledast$
De plus :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \Phi_k(\mathrm{M}) = \sum_{\mathrm{A}\in\mathcal{S}_k(\mathrm{M})} |\det(\mathrm{A})| = \sum_{\mathrm{A}\in\mathcal{S}_k(\mathrm{M})} |\det(\mathrm{T}(\mathrm{A}))| = \sum_{\mathrm{A}'\in\mathrm{T}(\mathcal{S}_k(\mathrm{M}))} |\det(\mathrm{A}')|$$

□