2015 - 2016

Oraux

Exercice - 1 : ENS 2016 - Younesse Kaddar

Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ a une valeur propre imaginaire pure, montrer que

$$\exists S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})\backslash\{0\};\ \ SA + {}^tAS = 0$$

Solution.

— **Détermination de** S **:** Notons $i\lambda$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) cette valeur propre.
Comme $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$, il existe $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ tel que ${}^tAX = i\lambda X$. Soit :

$$ {}^tAX{}^t\overline{X} = i\lambda X{}^t\overline{X} \tag{1}$$

Et :

$$\begin{aligned} {}^tA\overline{X}{}^tX &= -i\lambda\overline{X}{}^tX && \text{(en conjuguant (1))} && (2)\\ \overline{X}{}^tXA &= i\lambda\overline{X}{}^tX && \text{(en transposant (1))} && (3)\\ X{}^t\overline{X}A &= -i\lambda X{}^t\overline{X} && \text{(en conjuguant (3))} && (4)\end{aligned}$$

On pose $S \overset{\text{déf}}{=} X{}^t\overline{X} + \overline{X}{}^tX$

— S **convient :**

A) $S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ **:**

En effet :

— S est à coefficients réels, puisque $\overline{X}{}^tX = \overline{X{}^t\overline{X}}$

— En notant i un indice tel que $X_i = \|X\|_\infty > 0$, en position (i,i) : $[S]_{i,i} = 2\|X\|_\infty \neq 0$, donc S est non nulle.

B) $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ **:**
En effet : pour tout $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} {}^tY(X{}^t\overline{X})Y &= \sum_{i=1}^n Y_iX_i\overline{X_j}Y_j \\ &= \sum_{i=1}^n Y_iX_i\overline{X_jY_j} \\ &= \overline{{}^t\begin{pmatrix} Y_1X_1 \\ \vdots \\ Y_nX_n\end{pmatrix}}\begin{pmatrix} Y_1X_1 \\ \vdots \\ Y_nX_n\end{pmatrix} \geqslant 0\end{aligned}$$

C) $SA + {}^tAS = 0$ **:**
(1) + (2) + (3) + (4) fournit le résultat.

□