donc l'hypothèse de récurrence s'applique et $Rvwt' \in RED_{F[i:=t']}$; par définition de la réductibilité, $wt'(Rvwt')$ est dans $RED_{F[i:=\mathtt{S}(t')]} = RED_{F[i:=t]}$. $\diamondsuit$

Corollaire 5 *L'arithmétique de Heyting du premier ordre* $\mathbf{HA}_1$ *est cohérente.*

Preuve : Supposons que u soit un terme normal tel que $\vdash u : \bot$ soit dérivable. On peut supposer sans perte de généralité que u ne contient aucune variable libre du premier ordre, car si $i_1, \ldots, i_k$ sont ces variables, alors $\vdash u[i_1 := \mathtt{0}, \ldots, i_k := \mathtt{0}] : \bot$ est dérivable, et on peut remplacer u par toute forme normale de $u[i_1 := \mathtt{0}, \ldots, i_k := \mathtt{0}]$, qui n'a aucune variable variable libre du premier ordre.

Supposons donc que u est un terme normal sans variable libre du premier ordre tel que $\vdash u : \bot$ soit dérivable, de taille minimale. Alors u est nécessairement de la forme $hu_1 \ldots u_n$, où h est une variable ou le symbole ∇ (auquel cas $n = 1$), ou de la forme Ru_1u_2t. Le premier cas est impossible car le côté gauche du jugement est vide. Le second cas implique que $\vdash u_1 : \bot$, ce qui contredit la minimalité de u. Dans le dernier cas, t étant normal et sans variable libre, t est de la forme $\mathtt{S}(\ldots(\mathtt{S}(\mathtt{0})))$; c'est par récurrence structurelle sur t: si $t = \mathtt{0}$, c'est clair; si t est de la forme $\mathtt{S}(t_1)$, c'est par hypothèse de récurrence; et t ne peut pas être ni de la forme $t_1 + t_2$ ni de la forme $t_1 * t_2$, car par hypothèse de récurrence t_2 commencerait par $\mathtt{0}$ ou par $\mathtt{S}$, ce qui contredirait l'hypothèse de normalité de t. Mais comme $t = \mathtt{S}(\ldots(\mathtt{S}(\mathtt{0})))$, Ru_1u_2t n'est pas normal, ce qui montre que le dernier cas est impossible lui aussi. $\diamondsuit$

Ceci est le premier résultat de cohérence non complètement trivial que nous avons démontré. Il peut apparaître trivial, cependant, et en voici une démonstration élémentaire. Pour toute fonction ρ de $\mathcal{X}$ vers $\mathbb{N}$ (une *valuation* du premier ordre), pour tout terme t, définissons $[\![t]\!]\rho$ par: $[\![\mathtt{0}]\!]\rho \hat{=} 0$, $[\![\mathtt{S}(t)]\!]\rho \hat{=} [\![t]\!]\rho + 1$, $[\![s+t]\!]\rho \hat{=} [\![s]\!]\rho + [\![t]\!]\rho$, $[\![s*t]\!]\rho \hat{=} [\![s]\!]\rho \times [\![t]\!]\rho$. Définissons la relation $\rho \models F$ ("F est vraie dans la valuation ρ") par: $\rho \models \bot$ est faux, $\rho \models s \approx t$ si et seulement si $[\![s]\!]\rho = [\![t]\!]\rho$, $\rho \models F \Rightarrow G$ si et seulement si $\rho \models F$ implique $\rho \models G$, et $\rho \models \forall i \cdot F$ si et seulement si $\rho[i := n] \models F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\rho[i := n]$ envoie i vers n et toute autre variable j vers $\rho(j)$. Il est facile de voir que pour toute preuve de $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n \vdash u : F$, pour toute valuation ρ, $\rho \models F_1$ et $\ldots$ et $\rho \models F_n$ impliquent $\rho \models F$. $\mathbf{HA}_1$ est alors cohérent parce que par exemple $\vdash u : \bot$ n'est prouvable pour aucun $\lambda\nabla R$-terme u, sinon $\rho \models \bot$ serait vrai.

Cette démonstration sémantique est beaucoup plus simple que la démonstration syntaxique par normalisation des $\lambda\nabla R$-termes typés, mais en fait elle ne dit pas grand-chose: pour démontrer que pour toute preuve de $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n \vdash u : F$, pour toute valuation ρ, $\rho \models F_1$ et $\ldots$ et $\rho \models F_n$ impliquent $\rho \models F$, nous utilisons les règles usuelles de l'arithmétique. Autrement dit, on utilise essentiellement les mêmes règles que celles de $\mathbf{HA}_1$ pour montrer que les règles de $\mathbf{HA}_1$ sont correctes: c'est un cercle vicieux.

En général, on peut démontrer la cohérence de n'importe quelle théorie par ce moyen, même de théories incohérentes. Par exemple, considérons un langage de termes dans lequel on peut écrire $\{x \mid F(x)\}$ pour toute formule $F(x)$, dont la sémantique est l'ensemble de toutes les valeurs pour x qui rendent $F(x)$ vraie. On adopte une règle de déduction qui exprime que $t \in \{x \mid F(x)\}$ si et seulement $F(t)$ est vraie. Cette règle est valide, et par le même argument sémantique que ci-dessus, ce système est cohérent. Mais on verra au lemme 17 que cette théorie — la *théorie naïve des ensembles* — est en réalité incohérente. La raison pour laquelle la démonstration sémantique est incorrecte ici, c'est qu'elle suppose que l'on peut toujours définir l'ensemble de toutes les valeurs vérifiant une formule donnée (voir la définition de la sémantique de $\{x \mid F(x)\}$). Le fait que la théorie naïve des ensembles soit incohérente montre que, justement, ceci n'a pas de sens.

C'est pour éviter ce cercle vicieux, dans lequel finalement on ramène la cohérence d'une théorie à elle-même, que David Hilbert a proposé au début du vingtième siècle d'établir la cohérence des systèmes logiques utilisés en mathématiques par des moyens *finitistes*, c'est-à-dire n'utilisant des moyens de raisonnement qui ne portent que sur des objets finis: entiers, arbres finis (donc aussi formules, preuves), mais pas les ensembles quelconques d'entiers ou les arbres infinis, par exemple; et des principes de récurrence structurelle ou sur les entiers, mais pas de quantification sur l'ensemble (infini) de tous les entiers ou de tous les arbres finis par exemple. (Le système logique correspondant s'appelle l'arithmétique primitive récursive **PRA** et est beaucoup moins expressif, donc aussi beaucoup moins suspect d'incohérence, que $\mathbf{PA}_1$.)

La preuve de cohérence de $\mathbf{HA}_1$ que nous avons donnée est alors presque finitiste: les notions de formules et de preuves sont finitistes, de même que les transformations de preuves définies par les règles de réduction du $\lambda\nabla R$-calcul et que l'argument du corollaire 5 montrant qu'il n'y a pas de $\lambda\nabla R$-calcul clos de type $\perp$. Le seul argument non finitiste dans la preuve est l'argument de normalisation du théorème 6, où la définition par récurrence structurelle sur F du prédicat $u \in RED_F$ repose sur des quantifications universelles sur des domaines infinis: $u \in RED_{F\Rightarrow G}$ si et seulement si, *pour tout* $v \in RED_F$, $uv \in RED_G$. (Le fait que l'on raisonne sur des ensembles RED_F n'est pas non plus finitiste, mais comme la démonstration n'utilise RED_F que comme un prédicat $u \in RED_F$, ceci n'est pas une entorse grave au finitisme.)

En un sens, on ne peut pas faire mieux, et donc on ne peut pas échapper au cercle vicieux mentionné plus haut: le second théorème d'incomplétude de Gödel peut en effet être invoqué pour prouver qu'on ne peut montrer la cohérence de $\mathbf{HA}_1$ que dans un système logique au moins aussi fort que $\mathbf{HA}_1$ lui-même. (Nous ne décrirons pas formellement ce théorème; informellement, il énonce qu'on ne peut pas montrer la cohérence d'une théorie mathématique T dans T elle-même dès que T est cohérente, récursivement axiomatisable et contient l'arithmétique de Peano du premier ordre — ou de Heyting, ce qui ne change rien.)

Toutefois, la démonstration du corollaire 5 montre que que la seule partie non finitiste, et ce donc d'une façon essentielle, est l'argument de normalisation du $\lambda\nabla R$-calcul typé. En résumé, on a réduit la question de la cohérence de $\mathbf{HA}_1$ à la question de la seule terminaison d'une classe de programmes informatiques.

Exercice 28 (☡) *L'arithmétique de Heyting du premier ordre inclut en fait aussi le* $\wedge$, *le* $\vee$ *et le quantificateur* $\exists$. *Considérons le système* $\mathbf{HA}_1^\exists$, *obtenu à partir de* $\mathbf{HA}_1$ *en ajoutant les constructions de l'exercice 23. Montrer que le* $\lambda\nabla R$-*calcul enrichi par les constructions* ιtu *et* case $u\,\{\iota ix \mapsto v\}$ *avec les règles de typage correspondantes est fortement normalisant. (Adapter la technique de réductibilité. Pourquoi la technique d'effacement ne fonctionne-t-elle pas ? Montrer cependant que la technique d'effacement permet de montrer que* $\mathbf{HA}_1^\exists$ *normalise* faiblement*: toute stratégie qui normalise d'abord par* (β), (β_1), (∇), $(R\mathtt{0})$, $(R\mathtt{S})$, $(\exists\text{case})$, *puis normalise le terme obtenu par* $\rightarrow_{\mathbb{N}}$ *aboutit à une forme normale pour les règles de* $\mathbf{HA}_1^\exists$. *Voir aussi l'exercice 30 et l'exercice 37.) En conclure que* $\mathbf{HA}_1^\exists$ *est cohérent.*

Exercice 29 *L'arithmétique de Peano du premier ordre* $\mathbf{PA}_1$ *est à* $\mathbf{HA}_1$ *ce que* $\mathbf{ND}_1$ *est à* $\mathbf{NJf}_1$, *à savoir sa version classique. (Voir exercice 24.) Plus précisément, les règles de typage de* $\mathbf{PA}_1$ *sont* (Ax), $(\Rightarrow E)$, $(\Rightarrow I)$, $(\neg\neg E)$ *ainsi que* $(\forall I)$ *et* $(\forall E)$, $(Refl_0)$, $(\leftrightarrow^*_{\mathbb{N}})$ *et* (Rec). *Le* $\lambda\mathcal{C}R$-*calcul qui est le* λ-*calcul correspondant est défini par la grammaire:*

$$\Lambda^c_{\mathbb{N},1} ::= \mathcal{V} \mid \Lambda^c_{\mathbb{N},1}\Lambda^c_{\mathbb{N},1} \mid \lambda\mathcal{V}\cdot\Lambda^c_{\mathbb{N},1} \mid \mathcal{C}\Lambda^c_{\mathbb{N},1} \mid \Lambda^c_{\mathbb{N},1}T \mid \lambda\mathcal{X}\cdot\Lambda^c_{\mathbb{N},1} \mid r_0 \mid R\Lambda^c_{\mathbb{N},1}\Lambda^c_{\mathbb{N},1}T$$

où T *est le langage des termes du premier ordre de* $\mathbf{HA}_1$. *Les règles de réduction sont celles de* $\mathbf{HA}_1$ *moins* (∇), *plus* $(\mathcal{C}_L)$ *et* $(\eta\mathcal{C})$. *Montrer, en s'inspirant des résultats déjà démontrés, l'auto-réduction et la normalisation forte de ce calcul. En déduire que* $\mathbf{PA}_1$ *est cohérente.*