Version PDF

Chapitre 6 : Probabilités

Variables aléatoires

- Si X, Y sont indépendantes, et si ceci a un sens :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Cauchy-Schwartz :

$$E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$

Nom de la loi	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli : $B(p)$	$P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$	$E(X) = p$	$V(X) = pq$
Binomiale : $B(n,p)$	$X = \sum_1^n X_i, X_i \rightsquigarrow p$ $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$V(X) = npq$
Géométrique : $\mathscr{G}(p)$	$P(X=j) = q^{j-1}p$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$V(X) = \frac{q}{p^2}$
Poisson : $\mathscr{P}(\lambda)$	$P(X=n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$

Le problème du collectionneur de coupons

La v.a comptant le nb de boîtes achetées est $\sum_1^N T_i$, où $T_i \rightsquigarrow \mathscr{G}(1 - \frac{(i-1)}{N})$

$$E\left(\sum_1^N T_i\right) = N \sum_1^N \frac{1}{N-(i-1)}$$
$$= NH_N \sim N \log N$$

Proba d'avoir un dérangement dans $\mathfrak{S}_n$

$F_i \overset{\text{def}}{=} \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(i) = i\} \longrightarrow |F_I| = (n - |I|)!$

$$|\{\text{permutations avec au moins un point fixe}\}| = |\bigcup_{i=1}^n F_i|$$
$$= \sum_{i=1}^n |F_i| - \sum_{|I|=2} |F_I| + \sum_{|I|=3} |F_I| + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{|I|=n} |F_I|$$
$$= n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}$$

Donc $P(\{\text{dérangement}\}) = \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1/e$

II. Probabilités conditionnelles

> *Formule des probablités totales* :
>
> $\{B_i\}_{i \in I}$ un système complet d'événements, A un événement :
>
> $$P(A) = \sum_{i \in I} \underbrace{P(A|B_i)P(B_i)}_{=P(A \cap B_i)}$$

> *Formule de Bayes* :
>
> A et B non négligeables :

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$(= P(A \cap B))$

Chaînes de Markov

$M = (m_{i,j})$ est stochastique si :
$M \geq 0$, et $\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$ ($M\mathbf{1} = \mathbf{1}$)

Ensemble des matrices stochastiques : convexe, fermé, stable par produit.

> **Prop** : Si M est stochastique, $\rho(M) = 1$

> $$\rho(M) < 1 \iff \lim_{n \longrightarrow +\infty} M^n = 0$$

> Norme d'opérateur sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la norme sup sur $\mathbb{R}^n$:
> $$\forall M = (m_{i,j}), ||M||_1 = \sup_i (\sum_j |m_{i,j}|)$$

> $$\forall M, \rho(M) \leq ||M||_1$$

Définition

Chaîne de Markov :
C'est la donnée d'un triplet $(G, \lambda_0, \mathbb{P})$, où :

- $G = (S, E)$ est un graphe orienté fini.
- λ_0 est une loi de proba sur S appelée **loi initiale**
- $\mathbb{P} = (P_{i,j})_{(i,j) \in S^2}$ une matrice stochastique

Processus stochastique associé : $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans S :

- X_0 est de loi λ_0
- $\forall t \in S, \lambda_n(t) = P(X_n = t) = \sum_{s \in S} P_{s,t} P(X_{n-1} = s) = \sum_s P(X_n = t | X_{n-1} = s) P(X_{n-1} = s)$

1. $$[\mathbb{P}]_{s,t} = P_{s,t} = P(X_n = t | X_{n-1} = s)$$
   indépendant de n.
2. *Propriété de Markov* : $\forall s_0, \cdots, s_{n-1}, t$:
   $$P(X_n = t | X_{n-1} = s_{n-1}, \cdots, X_0 = s_0) = P(X_n = t | X_{n-1} = s_{n-1})$$
3. $$(\lambda_n(t))_{t \in S} = (\lambda_{n-1}(s))_{s \in S} \mathbb{P}$$

$$\forall n, (\lambda_n(t))_{t \in S} = (\mathbb{P}(X_n = t))_{t \in S} = (\lambda_0(s))_{s \in S} \mathbb{P}^n$$

Chaînes de Markov absorbantes

Chaîne de Markov $((S, E), \mathbb{P}, \lambda_0)$ absorbante :
ssi il existe un état $f \in S$ tq :

- $P_{f,f} = 1$ (donc $\forall s \neq f, P_{f,s} = 0$)
- $\forall s \in S$, il existe un chemin dans le graphe de s vers f

NB : S'il existe, un tel état est unique.

> **Th** : $\mathscr{C}$ une cdM absorbante d'état absorbant f :
> $$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = f) = 1$$

Classification des états. Convergence asymptotique.

Graphe réduit :
graphe (acyclique) des composantes fortement connexes.

Soit $\mathscr{C} = (S, \mathbb{P}, \lambda_0)$ une cdM.

état récurrent :
: s'il est dans une cfc **finale** (une dont on ne sort pas).

état transient :
: non récurrent

- Dans le graphe réduit, il existe une cfc finale
- Une cdM absorbante a un unique état récurrent qui est son état absorbant.

> **Th** : $\mathscr{C}$ une cdM, $R \subseteq S$ l'ensemble des états récurrents :
>
> $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(X_n \in R) = 1$$

Comportement asymptotique des chaînes de Markov irréductibles et apériodiques

Chaîne de Markov irréductible :
: *ssi* son graphe est fortement connexe.

Chaîne de Markov apériodique :
: ssi le pgcd des longueurs des cycles vaut 1.

C'est le cas si la matrice $\mathbb{P}$ est > 0.

> **Thm** : $\mathscr{C} = (S, \mathbb{P}, \lambda_0)$ une chaîne irréductible et apériodique. Alors :
>
> Il existe un unique vecteur de proba $\mu = (\mu(s))_{s \in S}$ appelé **loi stationnaire** tel que :
>
> $$\mu \mathbb{P} = \mu$$
>
> - De plus, $\mathbb{P}^k$ converge vers la matrice de rang 1 L dont toutes les lignes valent μ
>
> *i.e* :
>
> $$\forall s \in S, \lim_n P(X_n = s) = \mu(s)$$

Temps d'absorption

cdM d'état absorbant f

$$(T_i = n) = \{i \longrightarrow i_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow i_n = f \text{ et } \forall j < n, i_j \neq f\}$$
$$(T_i = +\infty) = \{i \longrightarrow i_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow i_j \longrightarrow i_{j+1} \longrightarrow \cdots \text{ chemin infini et } \forall j, i_j \neq f\}$$
$$T_f = 0$$

> **Th** : Q la matrice extraite de $\mathbb{P}$ de la façon suivante :
>
> $$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} & & & * \\ & Q & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{\text{colonne de} f} \end{pmatrix}$$
>
> Alors
>
> $$\rho(Q) < 1 \iff I - Q \text{ inversible}$$
>
> et $(E(T_i))_{i \neq f}$ est l'unique solution du système linéaire
>
> $$X = \mathbf{1} + QX$$
>
> En particulier,
>
> $$\forall i \neq f, E(T_i) < +\infty$$

Types de convergences et théorèmes limites

Différents types de convergence

Convergence presque sûre (Almost Everywhere) :

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{ae/ps} X \text{ ssi } P(\{\omega; \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

Convergence en probabilité :

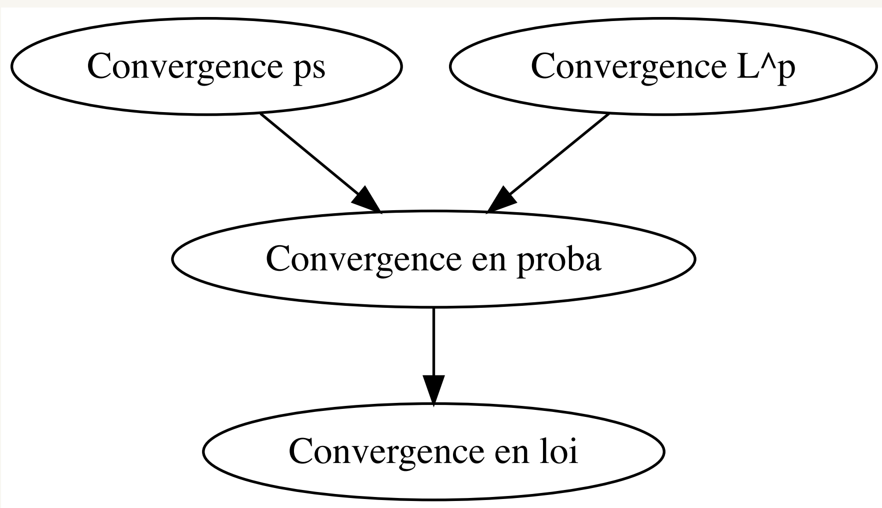
$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{proba} X \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \longrightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Convergence en loi (v.a discrètes) :

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} X \text{ ssi } \forall a, \lim_{n \longrightarrow +\infty} P(X_n = a) = P(X = a)$$

Convergence L^p :

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} X \text{ ssi } \lim_{n \longrightarrow +\infty} E(|X_n - X|^p) = 0$$



Inégalités

> *Markov* : X une v.a ≥ 0 tq $E(X) < +\infty$:
>
> $$\forall a, P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

> *Bienaymé-Tchebychev* : X une v.a qui a une variance :
>
> $$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Théorèmes limites

> **Loi faible des grands nombres** : $\{X_n\}$ v.a indépendantes admettant variance et un espérance tq
>
> - $\left(\frac{1}{n}\sum_1^n E(X_i)\right)_n$ est convergente de limite m
> - $\left(\frac{1}{n^2}\sum_1^n Var(X_i)\right)_n$ est convergente de limite 0
>
> Alors $\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i\right)_n$ converge en probabilité vers m.

Loi centrée :

d'espérance 0

Loi réduite :

de variance 1

Loi normale :

- $f(t) = \frac{\exp(-t^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$

> **Th Central Limite** :
>
> $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ indépendantes et équidistribuées tq $m = E(X_i)$, $\sigma^2 = Var(X_i)$:
>
> $\frac{1}{n}\sum_i X_i$ converge en loi vers $N(m, \sigma^2)$:
>
> $$f(t) = \frac{\exp(-(\frac{t-m}{\sigma})^2/2)}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$