DM de Langages Formels

Younesse Kaddar

- Énoncé
- Version PDF
- http://younesse.net/Langages-formels/DM_LangagesFormels/

I. Automates à pile déterministes

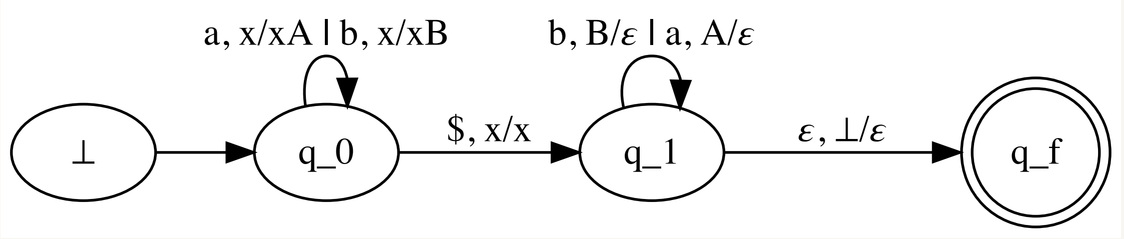
Exercice 1

1.

$$L_{pal} \overset{\text{def}}{=} \{w\$w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

Pour abréger les notations, x dénotera un élément quelconque de l'alphabet de pile $\{A, B, \bot\}$.

L'automate à pile $\mathscr{A}_{pal}$ (tel que $\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{a, b, \$\}, \Gamma \overset{\text{def}}{=} \{A, B, \bot\}$) suivant :



reconnaît L_{pal}.

- *en effet* :
  - on voit aisément que tout mot de L_{pal} est reconnu par $\mathscr{A}_{pal}$
  - et *réciproquement* : si $w' \in \{a, b, \$\}^*$ est reconnu par $\mathscr{A}_{pal}$, alors il existe $\gamma \in \Gamma^*$ tel que :

    $$q_0, \bot \xrightarrow{w}_{\mathscr{A}} q_f, \gamma$$

    Or, la seule transition allant en q_f est $(q_1, \bot, \varepsilon, q_f, \varepsilon)$, où $\bot$ est le fond de pile. Donc $\gamma = \varepsilon$.
    On peut ensuite remarquer qu'au cours de l'exécution de $\mathscr{A}_{pal}$ sur w', le nombre de transitions effectuées de q_0 à q_0 est égal au nombre de transitions de q_1 à q_1.
    - *en effet* : toutes les transitions de l'état q_0 dans lui-même ajoutent un symbole sur la pile, la transition de q_0 à q_1 laisse la pile inchangée, et toutes les transitions de q_1 dans lui-même suppriment un symbole la pile. Comme la pile est initialisée avec le fond de pile $\bot$, lequel est supprimé de q_1 à q_2, le résultat s'ensuit.

    Il vient donc, par définition de $\mathscr{A}_{pal}$, que

    $$q_0, \bot \xrightarrow{w}_{\mathscr{A}} q_f, \gamma$$

    est de la forme :

    $$\left.\begin{aligned} q_0, \bot &\xrightarrow{w_1}_{\mathscr{A}} q_0, \gamma_1 \xrightarrow{w_2}_{\mathscr{A}} \cdots \xrightarrow{w_i}_{\mathscr{A}} q_0, \gamma_i \\ &\xrightarrow{\$}_{\mathscr{A}} q_1, \gamma_i \\ &\xrightarrow{w_{i+1}}_{\mathscr{A}} q_1, \gamma'_1 \xrightarrow{w_{i+2}}_{\mathscr{A}} \cdots \xrightarrow{w_{2i}}_{\mathscr{A}} q_1, \underbrace{\gamma'_i}_{=\bot} \\ &\xrightarrow{\varepsilon}_{\mathscr{A}} q_f, \varepsilon \end{aligned}\right) \circledast$$

    où $\forall j, w_j \in \{a, b\}$
    Montrons que w' est de la forme :

    $$w\$w^R$$

    où $w \in \{a, b\}^*$, par induction sur la taille (impaire) de w'.
    - si $|w'| = 1$: alors $w' = \$$ nécessairement, et le résultat est acquis.
    - si $w' \overset{\text{def}}{=} w_1 \cdots w_i \$ w_{i+1} \cdots w_{2i}$ (où $i \geq 1 \land \forall j, w_j \in \{a, b\}$, par $\circledast$) et $|w| > 1$:

Par $\circledast$, et comme les transitions de q_0 dans lui-même ne font qu'ajouter un symbole au-dessus du sommet de la pile, et les transitions de q_1 dans lui-même ne font que supprimer le symbole de sommet de pile, on a :

$$\left.\begin{aligned} q_0, \bot & \xrightarrow{w_2}_{\mathscr{A}} q_0, \zeta_1 \xrightarrow{w_3}_{\mathscr{A}} \cdots \xrightarrow{w_i}_{\mathscr{A}} q_0, \zeta_i \\ & \xrightarrow{\$}_{\mathscr{A}} q_1, \zeta_i \\ & \xrightarrow{w_{i+1}}_{\mathscr{A}} q_1, \zeta'_1 \xrightarrow{w_{i+2}}_{\mathscr{A}} \cdots \xrightarrow{w_{2i-1}}_{\mathscr{A}} q_1, \underbrace{\zeta'_i}_{=\bot} \\ & \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathscr{A}} q_f, \varepsilon \end{aligned}\right) \circledast\circledast$$

(avec $w_2 \cdots w_i$, $w_{i+1} \cdots w_{2i-1}$ éventuellement vides) : le premier symbole ajouté sur la pile est le dernier enlevé.
Donc $w_2 \cdots w_i \$ w_{i+1} \cdots w_{2i-1} \in L(\mathscr{A}_{pal})$, et par hypothèse d'induction :

$$w_{i+1} \cdots w_{2i-1} = (w_2 \cdots w_i)^R$$

Supposons maintenant que $w_1 = a$. Par définition de $\mathscr{A}_{pal}$, A est le premier symbole ajouté (au-dessus du fond de pile) : par $\circledast$, il apparaît donc (d'après les considérations précédentes) qu'il a été enlevé par la transition

$$q_1, \gamma'_{i-1} \xrightarrow{w_{2i}}_{\mathscr{A}} q_1, \underbrace{\gamma'_i}_{=\bot}$$

d'où, par construction de $\mathscr{A}_{pal}$:

$$w_{2i} = a$$

On montre de même que si $w_1 = b$, $w_{2i} = b$, donc dans tous les cas : $w_1 = w_{2i}$, et :

$$\begin{aligned} w' \overset{\text{def}}{=} w_1 w_2 \cdots w_i \$ (w_2 \cdots w_i)^R w_{2i} &= w_1 w_2 \cdots w_i \$ (w_2 \cdots w_i)^R w_1 \\ &= w_1 w_2 \cdots w_i \$ (w_1 w_2 \cdots w_i)^R \end{aligned}$$

et le résultat est acquis.

En outre, on vérifie aisément que $\mathscr{A}_{pal}$ est déterministe, donc :

> $L_{pal} \overset{\text{def}}{=} \{w \$ w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ est déterministe.

2.

$$L_h \overset{\text{def}}{=} \{w \$ (h(w))^R \mid w \in \Sigma^+\}$$

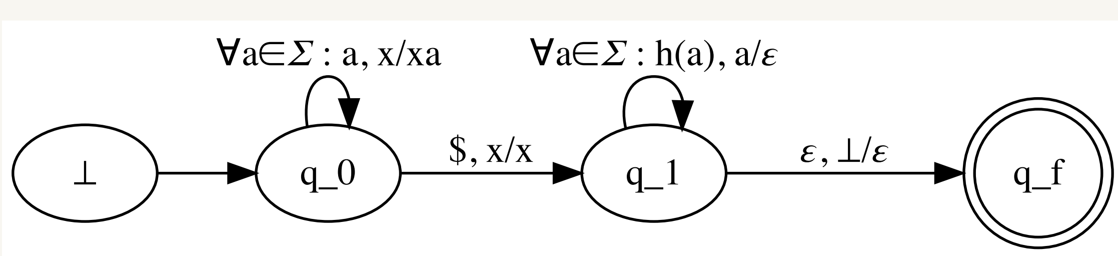
Pour abréger les notations, x dénotera un élément quelconque de l'alphabet de pile $\Sigma \cup \{\bot\}$.

On pose

$$\mathscr{A}_{pal} \overset{\text{def}}{=} \langle \{q_0, q_1, q_f\}, \underbrace{\Sigma \cup \Delta \cup \{\$\}}_{\text{alphabet d'entrée}}, \underbrace{\Sigma \cup \{\bot\}}_{\text{alphabet de pile}}, \delta, q_0, \bot, \{q_f\} \rangle$$

où :

$$\begin{aligned} \delta \overset{\text{def}}{=} & \{(q_0, x, a, q_0, xa) \mid a \in \Sigma\} \\ & \cup \{(q_0, x, \$, q_1, x)\} \\ & \cup \{(q_1, a, h(a), q_1, \varepsilon) \mid a \in \Sigma\} \\ & \cup \{(q_1, \bot, \varepsilon, q_f, \varepsilon)\} \end{aligned}$$



reconnaît L_{pal}.

- *en effet* :
  - on voit aisément que tout mot de L_{pal} est reconnu par $\mathscr{A}_{pal}$
  - et *réciproquement* : si $w' \in \Sigma \cup \Delta \cup \{\$\}$ est reconnu par $\mathscr{A}_{pal}$, on montre de la même manière que dans la question précédente qu'on a :

$$q_0, \perp \xrightarrow{w}_{\mathscr{A}} q_f, \varepsilon$$

Et que $q_0, \perp \xrightarrow{w}_{\mathscr{A}} q_f, \varepsilon$ est de la forme :

$$\left.\begin{aligned} q_0, \perp &\xrightarrow{w_1}_{\mathscr{A}} q_0, \gamma_1 \xrightarrow{w_2}_{\mathscr{A}} \cdots \xrightarrow{w_i}_{\mathscr{A}} q_0, \gamma_i \\ &\xrightarrow{\$}_{\mathscr{A}} q_1, \gamma_i \\ &\xrightarrow{w_{i+1}}_{\mathscr{A}} q_1, \gamma'_1 \xrightarrow{w_{i+2}}_{\mathscr{A}} \cdots \xrightarrow{w_{2i}}_{\mathscr{A}} q_1, \underbrace{\gamma'_i}_{=\perp} \\ &\xrightarrow{\varepsilon}_{\mathscr{A}} q_f, \varepsilon \end{aligned}\right) \circledast$$

où $\forall j, w_j \in \varSigma \cup \varDelta$
Montrons que w' est de la forme :

$$w\$(h(w))^R$$

où $w \in \varSigma^+$, par induction sur la taille (impaire) de w'.

- si $|w'| = 1$: alors $w' = \$$ nécessairement, et le résultat est acquis.
- si $w' \overset{\text{def}}{=} w_1 \cdots w_i \$ w_{i+1} \cdots w_{2i}$ (où $i \geq 1 \land \forall j, w_j \in \varSigma \cup \varDelta$, par $\circledast$) et $|w| > 1$:
  Par $\circledast$, et comme les transitions de q_0 dans lui-même ne font qu'ajouter un symbole au-dessus du sommet de la pile, et les transitions de q_1 dans lui-même ne font que supprimer le symbole de sommet de pile, on montre exactement de la même manière que dans la question précédente (avec l'hypothèse d'induction) que :

  $$w_{i+1} \cdots w_{2i-1} = (h(w_2 \cdots w_i))^R$$

  - Si $w_1 \overset{\text{def}}{=} a \in \varSigma$:
    Par définition de $\mathscr{A}_{pal}$, $a \in \varSigma$ est le premier symbole ajouté (au-dessus du fond de pile) : par $\circledast$, il apparaît donc qu'il a été enlevé par la transition

    $$q_1, \gamma'_{i-1} \xrightarrow{w_{2i}}_{\mathscr{A}} q_1, \underbrace{\gamma'_i}_{=\perp}$$

    Dans δ, la seule transition allant de q_1 dans q_1 et qui remplace $a \in \varSigma$ par ε est $(q_1, a, h(a), q_1, \varepsilon)$. Donc :

    $$w_{2i} = h(a) = h(w_1)$$

    Par suite :

    $$\begin{aligned} w' &= w_1 w_2 \cdots w_i \$ (h(w_2 \cdots w_i))^R w_{2i} \\ &= a w_2 \cdots w_i \$ (h(w_2 \cdots w_i))^R h(w_1) \\ &= w_1 w_2 \cdots w_i \$ (h(w_1) h(w_2 \cdots w_i))^R \\ &= w_1 w_2 \cdots w_i \$ (h(w_1 w_2 \cdots w_i))^R && \text{(car } h \text{ est un morphisme)} \end{aligned}$$

  - Si $w_1 \overset{\text{def}}{=} d \in \varDelta$:
    Dans δ, les seules transitions qui étiquetées par des lettres (de l'alphabet d'entrée) appartenant à $\varDelta$ vont de q_1 à q_1.
    Donc la transition

    $$q_0, \perp \xrightarrow{w_1}_{\mathscr{A}} q_0, \gamma_1$$

    ne peut pas avoir lieu, ce qui contredit $\circledast$. Ce cas est donc exclus.

  Dans tous les cas, le résultat est acquis.

En outre, $\mathscr{A}_{pal}$ est déterministe, puisque :

1. La seule ε-transition est $(q_1, \perp, \varepsilon, q_f, \varepsilon)$, et il n'existe aucune autre transition depuis $q_1, \perp$
2. Pour tous $q \in \{q_0, q_1, q_f\}, z \in \underbrace{\varSigma \cup \{\perp\}}_{\text{alphabet de pile}}, b \in \underbrace{\varSigma \cup \varDelta \cup \{\$\}}_{\text{alphabet d'entrée}}$, il existe au plus une transition depuis q, z en lisant b :
   - Si $q = q_0$:
     - si $b \in \varSigma$: La seule transition applicable est (q_0, z, b, q_0, zb).
     - si $b \in \varDelta$ ou $b = \$$: aucune transition n'est applicable.
   - Si $q = q_1$:
     - si $b \in \varSigma$: aucune transition n'est applicable.
     - si $b \in \varDelta$: si $z \in \varSigma$ et $b = h(z)$, la seule transition applicable est $(q_1, z, h(z), q_1, \varepsilon)$.
       Sinon : aucune transition n'est applicable.
     - si $b = \$$: la seule transition applicable est l'ε-transition précédemment citée

- Si $q = q_f$: aucune transition n'est applicable.

On a donc montré que

> $L_h \overset{\text{def}}{=} \{w\$(h(w))^R \mid w \in \Sigma^+\}$ est déterministe.

3.

Soit L un langage régulier. Montrons qu'il est déterministe hors-contexte.

L est reconnu par un automate

$$\mathscr{A} \overset{\text{def}}{=} \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$$

qu'on peut supposer **déterministe** et **sans ε-transition**, quitte à le déterminiser (avec l'automate des parties par exemple).

L'idée est cet automate peut être vu comme un automate à pile qui n'utilise pas sa pile : si on pose

$$\mathscr{A}_{PDA} \overset{\text{def}}{=} \langle Q, \Sigma, \{\bot\}, \delta', q_0, \bot, F\rangle$$

avec

$$\delta' \overset{\text{def}}{=} \{(q, \bot, a, q', \bot) \mid (q, a, q') \in \delta\}$$

On vérifie aisément que :

- *L'automate $\mathscr{A}$ et l'automate à pile $\mathscr{A}_{PDA}$ reconnaissent le même langage (i.e L) :*
  en effet : tout mot reconnu par $\mathscr{A}$ est clairement reconnu par $\mathscr{A}_{PDA}$, et réciproquement, puisque la pile de $\mathscr{A}_{PDA}$ reste inchangée.
- *L'automate $\mathscr{A}_{PDA}$ hérite du déterminisme de $\mathscr{A}$:*
  en effet : Pour tous $(q, z = \bot, b) \in Q \times \{\bot\} \times \Sigma$, le déterminisme de $\mathscr{A}$ implique qu'il existe au plus une transition de la forme (q, b, q') (où $q' \in Q$) dans δ; donc, par construction de δ', il existe au plus une transition de la forme (q, z, b, q') (où $q' \in Q$) dans δ'.
  Par ailleurs, il n'existe pas d'ε-transition.

On a donc montré que

> Tout langage régulier est déterministe hors-contexte.

Exercice 2

Soit L un langage hors-contexte.

Montrons que

> il existe un DPDA $\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0\rangle$ tel que $L = N(\mathcal{A})$ si, et seulement si L est déterministe et préfixe.

$\Longrightarrow$:

Supposons qu'il existe un DPDA $\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0\rangle$ tel que $L = N(\mathcal{A})$.

Montrons que L est déterministe et préfixe.

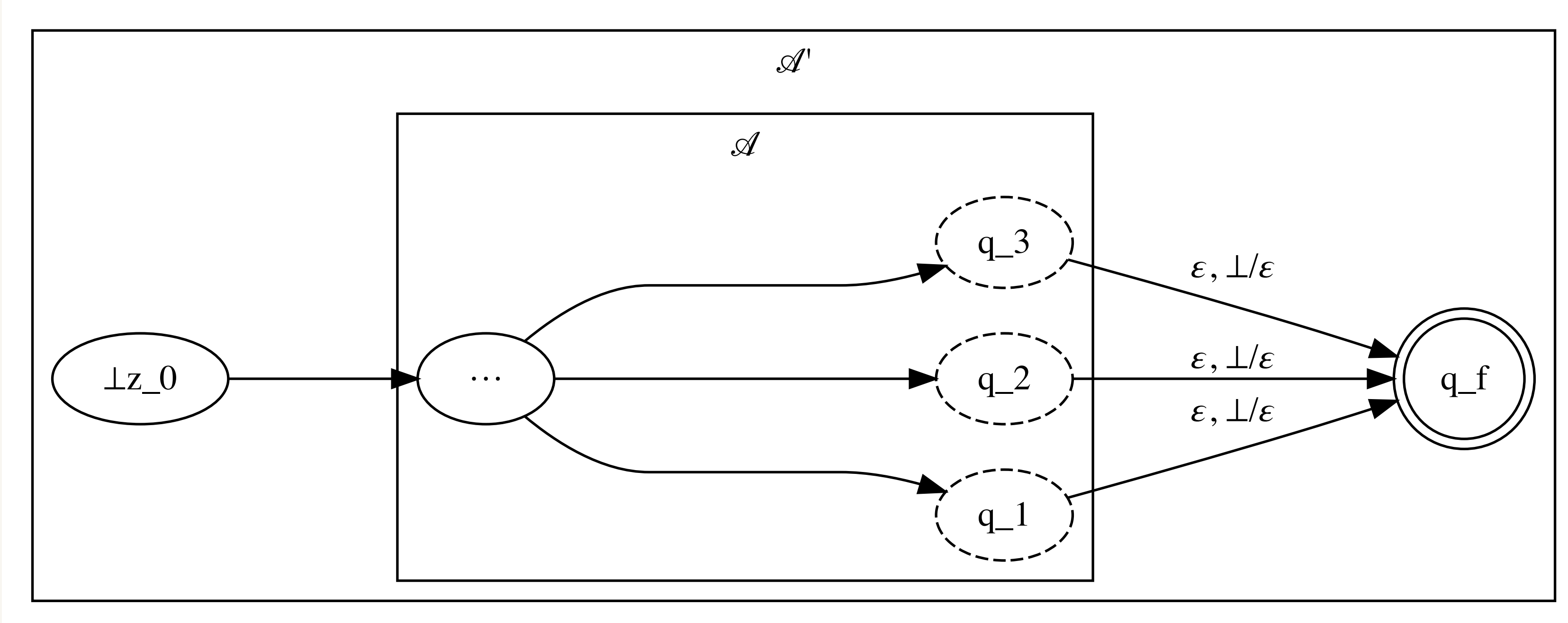
L est déterministe

On construit, de la même manière que dans le cours, l'automate à pile suivant :

$$\mathcal{A}' \overset{\text{def}}{=} \langle Q \sqcup \{q_f\}, \Sigma, \Gamma \sqcup \{\bot\}, \delta', q_0, \bot z_0, \{q_f\}\rangle$$

où

$$\delta' \overset{\text{def}}{=} \delta \cup \{(q, \bot, \varepsilon, q_f, \varepsilon) \mid q \in F\}$$



NB : on rajoute un nouveau fond de pile $\perp$, et pour chaque $q \in Q$ tel que la pile est “vide” (avec notre nouveau fond), on ajoute l’ε-transition $q, \perp \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon$

On a démontré en cours que

$$L(\mathcal{A}') = N(\mathcal{A})$$

De plus, $\mathcal{A}'$ est clairement déterministe, puisque pour tous $(q, z)) \in Q \sqcup \{q_f\} \times \Gamma \sqcup \{\perp\}$:

- si $q = q_f$: aucune transition ne part de q
- *sinon*, si $q \in Q$:
  - si $z \in \Gamma$: les transitions partant de (q, z) sont celles de $\mathcal{A}$, qui est déterministe.
  - si $z = \perp$: la seule transition qui part de $(q, \perp)$ est l’ε-transition $(q, \perp, \varepsilon, q_f, \varepsilon) \in \delta'$

Donc L est déterministe.

L est préfixe

Si n’était pas le cas, il existerait un mot $w \overset{\text{def}}{=} w_1 \underbrace{w_2}_{\text{de longueur } \geq 1} \in L$ avec $w_1 \in L$.

Par conséquent, comme $L = N(\mathcal{A})$, il existerait $q_1, q_1', q_2 \in Q$ tels que :

$$\begin{cases} q_0, z_0 \overset{w_1}{\longrightarrow}_{\mathcal{A}} q_1, \varepsilon \quad (\text{car } w_1 \in L) \\ q_0, z_0 \overset{w_1}{\longrightarrow}_{\mathcal{A}} q_1', \gamma \overset{w_2}{\longrightarrow}^+_{\mathcal{A}} q_2, \varepsilon \quad (\text{car } w_2 \in L \text{ et } |w_2| > 0) \end{cases}$$

Mais alors le déterminisme de $\mathcal{A}$ impliquerait :

$$\begin{cases} q_1' = q_1 \\ \gamma = \varepsilon \end{cases}$$

Et

$$q_1, \varepsilon \overset{w_2}{\longrightarrow}^+_{\mathcal{A}} q_2, \varepsilon$$

devient alors absurde puisque qu’aucune transition ne peut partir de (q_1, ε), car la pile est vide.

Le résultat est donc acquis.

$\Longleftarrow$:

Supposons qu’il existe un DPDA $\mathcal{A}' \overset{\text{def}}{=} \langle Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', z_0', F' \rangle$ reconnaissant L et que L est préfixe.

Montrons qu’il existe un DPDA $\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0 \rangle$ tel que $L = N(\mathcal{A})$.

Notons déjà qu’on peut **supprimer toutes les transitions sortant d’un état final de $\mathcal{A}'$** sans changer le langage reconnu par $\mathcal{A}'$ (qui reste L) puisque L est **préfixe** :

En effet : montrons que pour toute exécution de la forme

$$q'_0, z'_0 \xrightarrow{w_1}_{\mathcal{A}'} \underbrace{q'_F}_{\in F'}, \gamma'_F \xrightarrow{w_2}{}^{+}_{\mathcal{A}'} q'_2, \gamma'_2 \quad (\text{avec } |w_2| > 0)$$

nécessairement : $w_1 w_2 \notin L(\mathcal{A}') = L$.

Par l'absurde : si $w_1 w_2 \in L(\mathcal{A}') = L$, alors comme $w_1 \in L$ (puisque $q'_0, z'_0 \xrightarrow{w_1}_{\mathcal{A}'} \underbrace{q'_F}_{\in F'}, \gamma'_F$) et $|w_2| > 0$, L ne serait pas préfixe.

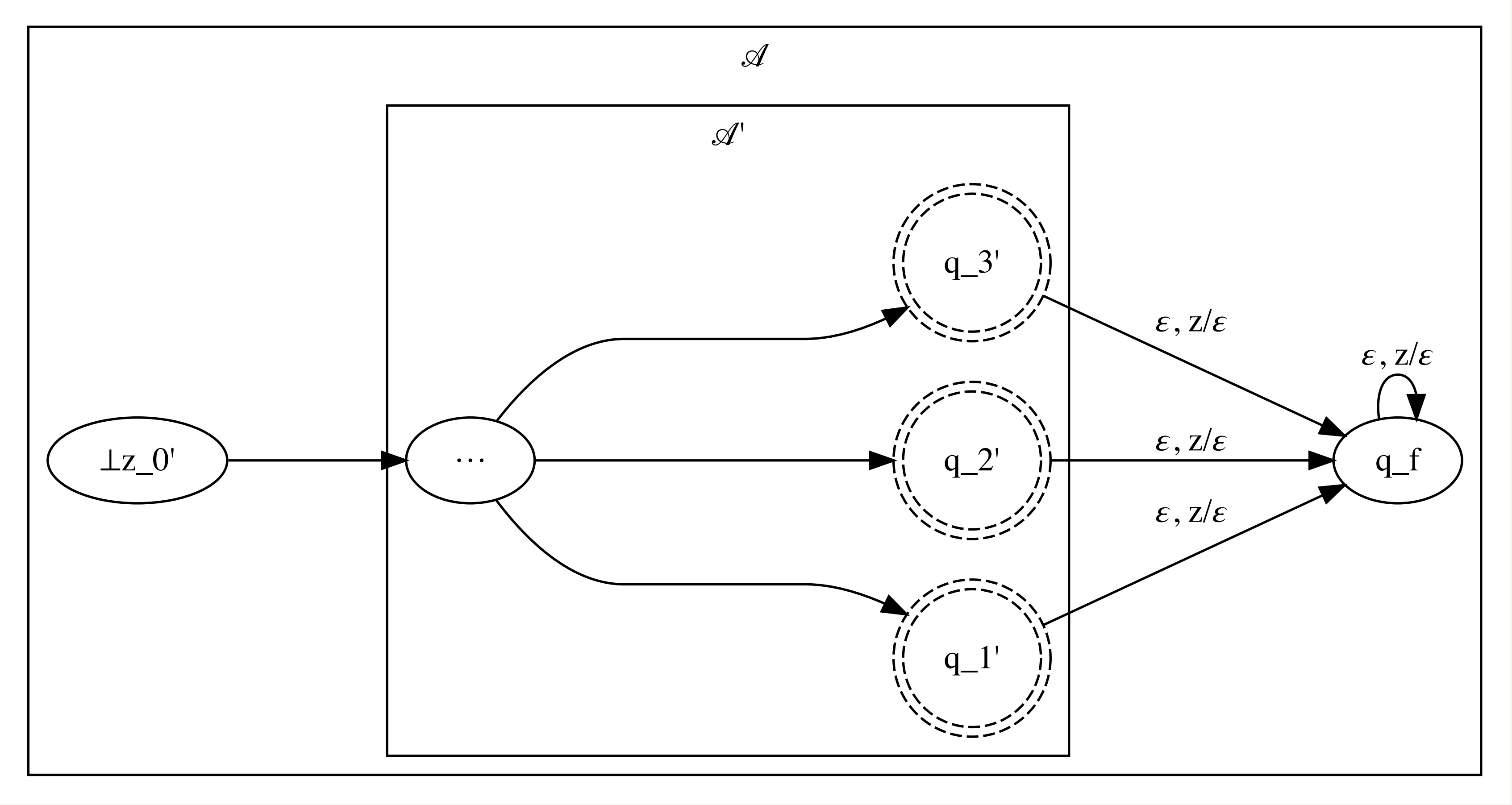
Pour ne pas alourdir les notations, on note encore $\mathcal{A}' \overset{\text{def}}{=} \langle Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q'_0, z'_0, F' \rangle$ l'automate obtenu en supprimant toutes les transitions sortant d'un état final.

On construit alors, de la même manière que dans le cours, l'automate à pile (qui accepte par pile vide) suivant :

$$\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \langle Q' \sqcup \{q_f\}, \Sigma', \Gamma' \sqcup \{\bot\}, \delta, q'_0, \bot z'_0 \rangle$$

où

$$\delta \overset{\text{def}}{=} \delta' \cup \{(q, z, \varepsilon, q_f, \varepsilon) \mid q \in F' \sqcup \{q_f\}, z \in \Gamma' \sqcup \{\bot\}\}$$



NB : on rajoute un nouveau symbole de fond de pile $\bot$, et on ajoute des ε-transitions partant des anciens états finals vers un nouvel état q_f qui vide la pile.

On a démontré en cours que

$$N(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}') = L$$

De plus, $\mathcal{A}$ est **déterministe**, puisque pour tous $(q, z, b) \in Q' \sqcup \{q_f\} \times \Gamma' \sqcup \{\bot\} \times \Sigma$:

- si $q = q_f$: la seule transition partant de (q, z) est l'ε-transition $(q_f, z, \varepsilon, q_f, \varepsilon)$.
- *sinon*, si $q \in Q' \backslash F'$:
  - si $z \in \Gamma'$: les transitions partant de (q, z) sont celles de $\mathcal{A}'$, qui est déterministe.
  - si $z = \bot$: aucune transition ne part de $(q, \bot)$.
- *sinon*, si $q \in F'$:
  comme on a supprimé toutes les transitions sortant d'un état final dans $\mathcal{A}'$, la seule transition qui part de (q, z) est l'ε-transition $(q, z, \varepsilon, q_f, \varepsilon) \in \delta'$

Donc le résultat est acquis.

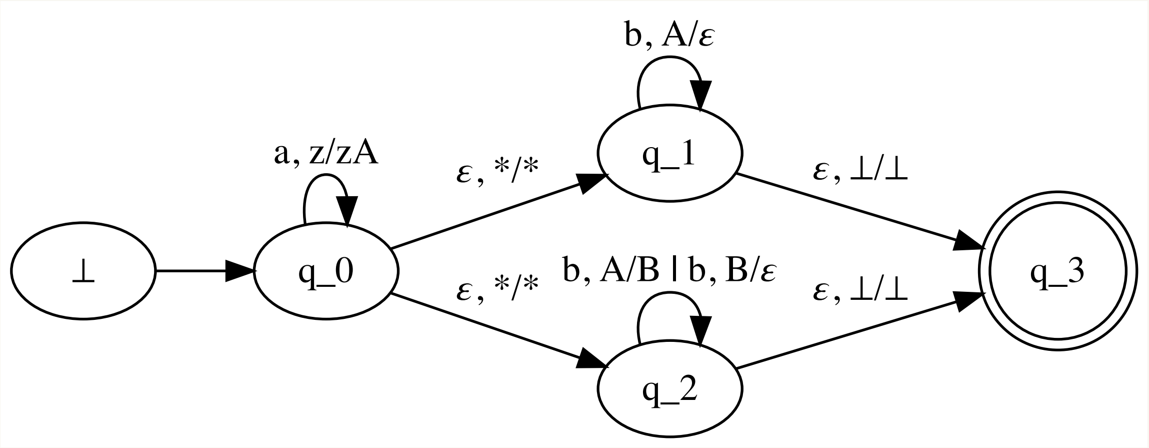
On a donc montré que

> Pour tout langage hors-contexte L, il existe un DPDA $\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0 \rangle$ tel que $L = N(\mathcal{A})$ si, et seulement si L est déterministe et préfixe.

Exercice 3

1.

Comme on l'a vu en TD, l'automate $\mathscr{A}$ suivant (avec $\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}, \Gamma \overset{\text{def}}{=} \{A, B, \bot\}$) reconnaît $L \overset{\text{def}}{=} \{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$:



En effet :

Tout mot de L est clairement reconnu, et *réciproquement*, si $w \overset{\text{def}}{=} w_1 \cdots w_{m+n} \in L(\mathscr{A})$ (où les $w_i \in \{a, b\}$):

- soit l'exécution de $\mathscr{A}$ sur w passe par q_1 :
  Alors elle est de la forme :

  $$q_0, \underbrace{\gamma_0}_{=\bot} \xrightarrow{w_1} \cdots \xrightarrow{w_m} q_0, \gamma_m \xrightarrow{\varepsilon} q_1, \gamma_m \xrightarrow{w_{m+1}} \cdots \xrightarrow{w_{m+n}} q_1, \gamma_{m+n} \xrightarrow{\varepsilon} q_3, \bot$$

  Comme l'exécution est acceptante, elle se termine nécessairement par l'unique transition $q_1, \bot \xrightarrow{\varepsilon} \underbrace{q_3}_{\text{unique état final}}, \bot$, et la pile est dans le même état qu'au départ (il n'y a que le fond de pile) :

  $$\gamma_{m+n} = \bot \quad \circledast$$

  Or :
  - toutes les transitions de q_0 dans q_0 empilent un A, et seulement à la lecture de la lettre a. Donc :

  $$\begin{cases} w_1 = \cdots = w_m = a \\ \forall i \in [\![1, m]\!],\ \gamma_i = \bot \overbrace{A \cdots A}^{i \text{ fois}} \qquad \text{(par une récurrence immédiate sur } m) \end{cases}$$

  - l'unique transition de q_0 vers q_1 est une ε-transition qui laisse la pile inchangée
  - toutes les transitions de q_1 dans q_1 dépilent un A, et seulement à la lecture de la lettre b. Donc, de même (par une récurrence immédiate sur n) :

  $$\begin{cases} w_{m+1} = \cdots = w_{m+n} = b \\ \forall i \in [\![m+1, m+n]\!],\ \gamma_i = \bot \quad \overbrace{A \cdots A}^{m-(i-m)=2m-i \text{ fois}} \end{cases} \qquad \circledast\circledast$$

  - l'unique transition de q_2 vers q_3 est une ε-transition qui la pile inchangée

  Comme

  $$\gamma_{m+n} = \begin{cases} \bot & \text{par } \circledast \\ \bot \quad \underbrace{A \cdots A}_{2m-(m+n)=m-n \text{ fois}} & \text{par } \circledast\circledast \end{cases}$$

  Il vient que $m - n = 0$, et

  $$w = \underbrace{w_1 \cdots w_n}_{= a^n} \underbrace{w_{n+1} \cdots w_{2n}}_{= b^n} \in L$$

- soit l'exécution de $\mathscr{A}$ sur w passe par q_2 :
  Alors elle est de la forme :

  $$q_0, \underbrace{\gamma_0}_{=\bot} \xrightarrow{w_1} \cdots \xrightarrow{w_m} q_0, \gamma_m \xrightarrow{\varepsilon} q_2, \gamma_m \xrightarrow{w_{m+1}} \cdots \xrightarrow{w_{m+n}} q_2, \gamma_{m+n} \xrightarrow{\varepsilon} q_3, \bot$$

Comme l'exécution est acceptante, elle se termine nécessairement par l'unique transition $q_2, \bot \xrightarrow{\varepsilon} \underbrace{q_3}_{\text{unique état final}}, \bot$, et

encore une fois :

$$\gamma_{m+n} = \bot \quad \circledast$$

Or :

- On montre de même que précédemment que :

$$\begin{cases} w_1 = \cdots = w_m = a \\ \forall i \in [\![1, m]\!],\ \gamma_i = \bot \overbrace{A \cdots A}^{i \text{ fois}} \end{cases}$$

- l'unique transition de q_0 vers q_2 est une ε-transition qui laisse la pile inchangée
- toutes les transitions de q_2 dans q_2
  - remplacent le haut de la pile par un B si c'est un A

  ou
  - dépilent le haut de la pile si c'est un B

  et seulement à la lecture de la lettre b. Donc :

$$w_{m+1} = \cdots = w_{m+n} = b$$

  Et

$$\begin{matrix} \gamma_{m+1} = \bot A^{m-1} B & \gamma_{m+2} = \bot A^{m-1} \\ \gamma_{m+3} = \bot A^{m-2} B & \gamma_{m+4} = \bot A^{m-2} \\ \gamma_{m+5} = \bot A^{m-3} B & \gamma_{m+6} = \bot A^{m-3} \\ \vdots & \end{matrix}$$

  On montre ainsi par une récurrence immédiate sur n que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \gamma_{m+i} = \begin{cases} \bot A^{m-i/2} & \text{si } i \text{ est pair} \\ \bot A^{m-(i+1)/2} B & \text{sinon} \end{cases} \qquad \circledast\circledast$$

- l'unique transition de q_2 vers q_3 est une ε-transition qui la pile inchangée

Comme

$$\gamma_{m+n} = \bot \quad \text{par } \circledast$$

et

$$\gamma_{m+n} = \begin{cases} \bot A^{m-n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \bot A^{m-(n+1)/2} B & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{par } \circledast\circledast$$

Il vient que n est pair et $m - n/2 = 0$, d'où :

$$w = \underbrace{w_1 \cdots w_m}_{= a^m} \underbrace{w_{m+1} \cdots w_{m+2m}}_{= b^{2m}} \in L$$

On a donc montré que

> $L \overset{\text{def}}{=} \{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ est algébrique.

2.

a).

Soit $w \in L(\mathcal{A}')$.

Montrons que $h(w) \in L(\mathcal{A})$.

L'exécution de $\mathcal{A}'$ sur w est de la forme :

$$(q_0, 0), z_0 \xrightarrow{w_1}_{\mathcal{A}'} (q_1, 0), \gamma_1 \xrightarrow{w_2}_{\mathcal{A}'} \cdots \xrightarrow{w_m}_{\mathcal{A}'} (\underbrace{q_m}_{\in F}, 0), \gamma_m$$

$$\xrightarrow{g(w_{m+1})}_{\mathcal{A}'} (q_{m+1}, 1), \gamma_{m+1} \xrightarrow{g(w_{m+2})}_{\mathcal{A}'} \cdots \xrightarrow{g(w_{m+n})}_{\mathcal{A}'} (\underbrace{q_{m+n}}_{\in F}, 1), \gamma_{m+n}$$

(puisque qu'il n'existe aucune transition allant d'un état de $Q \times \{1\}$ vers un état de $Q \times \{0\}$)

où

- $w = w_1 \cdots w_m g(w_{m+1}) \cdots g(w_{m+n})$
- $q_0, q_1, \cdots, q_{m-1} \notin F$
- $q_m \in F$
- $q_{m+n} \in F$ puisque $w \in L(\mathcal{A}')$ et l'ensemble des états finals de $\mathcal{A}'$ est $F \times \{1\}$
- $w_1, \cdots, w_m \in \{a, b, \varepsilon\}$
- $w_{m+1}, \cdots, w_{m+n} \in \{b, \varepsilon\}$

Par définition de δ', l'exécution

$$\begin{aligned} q_0, z_0 \xrightarrow{w_1}_{\mathcal{A}} q_1, \gamma_1 \xrightarrow{w_2}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{w_m}_{\mathcal{A}} \underbrace{q_m}_{\in F}, \gamma_m \\ \xrightarrow{w_{m+1}}_{\mathcal{A}} q_{m+1}, \gamma_{m+1} \xrightarrow{w_{m+2}}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{w_{m+n}}_{\mathcal{A}} \underbrace{q_{m+n}}_{\in F}, \gamma_{m+n} \end{aligned}$$

est acceptante dans $\mathcal{A}$, et

$$\begin{cases} w_1 \cdots w_m \in L & \text{donc en particulier } w_1, \cdots, w_m \in \{a, b, \varepsilon\} \\ w_1 \cdots w_{m+n} \in L \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} h(w) &= h(w_1) \cdots h(w_m) h(g(w_{m+1})) \cdots h(g(w_{m+n})) && (\text{car } h \text{ est un morphisme}) \\ &= h(w_1) \cdots h(w_m) w_{m+1} \cdots w_{m+n} && (\text{car } h \circ g = id) \\ &= w_1 \cdots w_m w_{m+1} \cdots w_{m+n} && (\text{car } h_{|\{a,b,\varepsilon\}} = id \text{ et } w_1, \cdots, w_m \in \{a, b, \varepsilon\}\ ) \in L \end{aligned}$$

Et le résultat est acquis.

b).

Soit $w \in L(\mathcal{A}')$.

On reprend les résultats et notations de la question précédente :

- $w = w_1 \cdots w_m\ g(w_{m+1}) \cdots g(w_{m+n})$
- $w_{m+1}, \cdots, w_{m+n} \in \{b, \varepsilon\}$
    - donc $g(w_{m+1}), \cdots, g(w_{m+n}) \in \{c, \varepsilon\}$
- $w_1 \cdots w_m \in L = L(\mathcal{A})$

Il vient donc que

$$w \overset{\text{def}}{=} w_1' w_2'$$

où $w_1' \in L(\mathcal{A}), w_2' \in \{c\}^*$

et le résultat est acquis.

d).

Soit $w \in L(\mathcal{A}')$.

D'après **b)** :

$$w \overset{\text{def}}{=} w_1' w_2'$$

- $w_1' \in L(\mathcal{A}) = L$
    - *donc en particulier* : les lettres de w_1' appartiennent à $\{a, b\}$, et $h(w_1') = w_1'$ puisque $h_{|\{a,b\}} = id$
- $w_2' \in \{c\}^*$
    - *donc en particulier* : $h(w_2') \in \{b\}^*$ puisque $h(c) = b$

Et d'après **a)** :

$$L \ni h(w) = h(w_1') h(w_2') = \underbrace{w_1'}_{\in L}\ \underbrace{h(w_2')}_{\in \{b\}^*}$$

Donc deux choses l'une :

- Soit $w_2' = \varepsilon$:
  et

$$w = w_1' \in L$$

- Soit $|w_2'| > 0$:
  et comme

$$\underbrace{w_1'}_{\in L} \underbrace{h(w_2')}_{\in \{b\}^+} \in L$$

  il vient que il existe $n > 0$ tel que :

$$\begin{cases} w_1' h(w_2') = a^n b^{2n} \in L \\ w_1' = a^n b^n \in L \\ h(w_2') = b^n \end{cases}$$

  Donc

$$w = w_1' w_2' = a^n b^n c^n$$

Dans tous les cas :

$$w \in \{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \cup L$$

et on a montré que :

> $$L(\mathcal{A}') \in \{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \cup L$$

3.

Soit $n > 0$.

Montrons que $a^n b^n c^n \in L(\mathcal{A}')$.

Remarquons que

$$a^n b^n c^n = a^n b^n g(b^n)$$

Or, comme

- $a^n b^{2n} \in L$
- $a^n b^n \in L$
- $\mathcal{A}$ est déterministe

il existe une unique exécution de $\mathcal{A}$ sur $a^n b^{2n}$:

$$q_0, z_0 \overset{a^n b^n}{\longrightarrow}^*_{\mathcal{A}} \underbrace{q_1}_{\in F}, \gamma_1 \overset{b^n}{\longrightarrow}^*_{\mathcal{A}} \underbrace{q_2}_{\in F}, \gamma_2 \quad \circledast$$

telle que

- q_1 (resp. q_2) est le premier état final par lequel passe toute exécution acceptante de $\mathcal{A}$ sur $a^n b^n$ (resp. $a^n b^{2n}$) ($\mathcal{A}$ est déterministe)
  - on prend cette précaution à cause de l'existence éventuelle d'ε-transitions dans $\mathcal{A}$ partant de q_1 (resp. q_2) dans autre état final
  - il vient donc que, hormis q_1, aucun état par lequel passe l'exécution $q_0, z_0 \overset{a^n b^n}{\longrightarrow}^*_{\mathcal{A}} q_1, \gamma_1$ n'est final

De fait :

- toute transition de $q_0, z_0 \overset{a^n b^n}{\longrightarrow}^*_{\mathcal{A}} q_1, \gamma_1$ est de la forme :

$$(q, z, d, q', \gamma) \in \delta$$

  où
  - $d \in \{a, b, \varepsilon\}$
  - $q \notin F$
- la première transition de $q_1, \gamma_1 \overset{b^n}{\longrightarrow}^*_{\mathcal{A}} q_2, \gamma_2$ est de la forme :

$$(q, z, d, q', \gamma) \in \delta$$

où
- $d \in \{b, \varepsilon\}$
- $q = q_1 \in F$

- les autres transition de $q_1, \gamma_1 \overset{b^n}{\longrightarrow}^*_{\mathcal{A}} q_2, \gamma_2$ sont de la forme :

$$(q, z, d, q', \gamma) \in \delta$$

où
- $d \in \{b, \varepsilon\}$

Donc l'exécution

$$\overbrace{(q_0, 0), z_0 \overset{a^n b^n}{\longrightarrow}^*_{\mathcal{A}'} (\underbrace{q_1}_{\in F}, 0), \gamma_1}^{\text{les états appartiennent à } Q \times \{0\}} \overbrace{\overset{g(b)^n = c^n}{\longrightarrow}^*_{\mathcal{A}'} (\underbrace{q_2}_{\in F}, 1)}^{\text{les états appartiennent à } Q \times \{1\}}$$

obtenue à partir de ⊛ est bien définie et existe dans $\mathcal{A}'$

Comme $(q_1, 1)$ est final dans $\mathcal{A}'$, il en résulte donc que :

$$a^n b^n c^n \in L(\mathcal{A}')$$

et le résultat est acquis.

$$\{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \subseteq L(\mathcal{A}')$$

4.

D'après **2. c)** et **3.** :

$$\{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \subseteq L(\mathcal{A}') \subseteq \{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \cup L$$

Donc en intersectant avec le langage régulier $\{a, b, c\}^* c$:

$$\underbrace{\{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \cap \{a, b, c\}^* c}_{= \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}} \subseteq L(\mathcal{A}') \cap \{a, b, c\}^* c \subseteq \underbrace{\Big(\{a^n b^n c^n \mid n > 0\} \cap \{a, b, c\}^* c\Big)}_{= \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}} \cup \underbrace{\Big(L \cap \{a, b, c\}^* c\Big)}_{= \emptyset}$$

Donc

$$L(\mathcal{A}') \cap \{a, b, c\}^* c = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$$

Or

- $L(\mathcal{A}') \cap \{a, b, c\}^* c$ est **algébrique**, en tant qu'intersection d'un langage algébrique et d'un langage régulier (d'après le *corollaire 1* de la section "Théorème de Bar-Hillel" du cours)

- $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ n'est pas algébrique (d'après l'**EX 2. 1)** du TD5) :
  - Supposons que $L \overset{\text{def}}{=} \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ est algébrique.
    Soit $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ telle que
    - $L(G) = L$
    - K est l'entier donné par le lemme d'Ogden, dont l'énoncé est rappelé ici.

    Soit $w = a^K b^K c^K$ (où les a sont distingués, par exemple).
    Il existe $w = \alpha u \beta v \gamma$ tq $\alpha u^n \beta v^n \gamma \in L$ pour tout n, et $u \neq \varepsilon$ ou $v \neq \varepsilon$ (par le point **c)** du lemme d'Ogden).
    Comme $\alpha u^2 \beta v^2 \gamma \in L \subseteq a^* b^* c^*$, u ne contient que des a ou que des b ou que des c, et de même pour v.
    Or un des deux mots parmi u et v est non vide, et on n'a pas les trois lettres dans ces deux mots, donc $\alpha u^n \beta v^n \gamma \in L$ pour tout n, c'est absurde.

On obtient donc une contradiction, et :

> $L \overset{\text{def}}{=} \{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ n'est pas déterministe.

Exercice 4

1.

Réduisons le complémentaire du problème de correspondance de Post au problème de l'intersection vide $\mathscr{P}_{int\_vide}$

On se donne une instance du problème de correspondance de Post :

- Σ_{Post} un alphabet tel que $\Sigma_{Post} \not\ni \$$
- $n \in \mathbb{N}$
- $u_1, \cdots, u_n \in \Sigma_{Post}^+$
- $v_1, \cdots, v_n \in \Sigma_{Post}^+$

Soit Σ un alphabet à n lettres $a_1, \cdots, a_n$ tel que

$$\Sigma \cap (\Sigma_{Post} \cup \{\$\}) = \emptyset$$

On note h_u (resp. h_v) le morphisme qui, à chaque a_i, associe u_i (resp. v_i).

On construit, de la même manière que dans l'**exercice 1**, deux automates à pile déterministes $\mathscr{A}_u$ et $\mathscr{A}_v$ reconnaissant respectivement :

$$L_u \overset{\text{def}}{=} \{w\$(h_u(w))^R \mid w \in \Sigma^+\}$$

et

$$L_v \overset{\text{def}}{=} \{w\$(h_v(w))^R \mid w \in \Sigma^+\}$$

La fonction qui calcule ces deux automates est bien **calculable**.

De plus :

- *si l'instance du problème de correspondance de Post est positive* :
  il existe $k \in [\![1, n]\!]$ et des indices $i_1, \cdots, i_k \in [\![1, n]\!]$ tels que :

  $$u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

  donc

  $$h_u(a_{i_1}) \cdots h_u(a_{i_k}) = u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k} = h_v(a_{i_1}) \cdots h_v(a_{i_k})$$

  et

  $$\begin{aligned} L_u \ni a_{i_1} \cdots a_{i_k}\$(h_u(a_{i_1}) \cdots h_u(a_{i_k}))^R \\ = a_{i_1} \cdots a_{i_k}\$(h_v(a_{i_1}) \cdots h_v(a_{i_k}))^R \in L_v \end{aligned}$$

  Donc $L_u \cap L_v \neq \emptyset$

- Si $L_u \cap L_v \neq \emptyset$:
  Alors il existe :

  $$\begin{aligned} L_u \ni a_{i_1} \cdots a_{i_k}\$(h_u(a_{i_1}) \cdots h_u(a_{i_k}))^R \\ = a_{j_1} \cdots a_{j_r}\$(h_v(a_{j_1}) \cdots h_v(a_{j_r}))^R \in L_v \end{aligned}$$

  Comme $\$ \notin \Sigma$:

  $$\begin{cases} a_{i_1} \cdots a_{i_k} = a_{j_1} \cdots a_{j_r} \\ h_u(a_{i_1}) \cdots h_u(a_{i_k}) = h_v(a_{j_1}) \cdots h_v(a_{j_r}) \end{cases}$$

  Donc $k = r$, $(i_1, \cdots, i_k) = (j_1, \cdots, j_k)$, et :

  $$u_{i_1} \cdots u_{i_k} = h_u(a_{i_1}) \cdots h_u(a_{i_k}) = h_v(a_{j_1}) \cdots h_v(a_{j_r}) = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

  Donc l'instance du problème de correspondance de Post est positive.

On a montré que :

l'instance de problème de correspondance de Post est positive si, et seulement si l'instance (L_u, L_v) de $\mathscr{P}_{int\_vide}$ est négative.

Soit :

l'instance de problème de correspondance de Post est négative si, et seulement si l'instance $(\mathscr{A}_u, \mathscr{A}_v)$ de $\mathscr{P}_{int\_vide}$ est positive, et

> On a réduit $co-PCP$, qui est indécidable, à $\mathscr{P}_{int\_vide}$: $\mathscr{P}_{int\_vide}$ est donc indécidable.

2.

a).

On réduit $\mathscr{P}_{int\_vide}$ à ce problème $\mathscr{P}_{inclusion}$.

Soit $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ une instance de $\mathscr{P}_{int\_vide}$ ($\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ sont des DPDA).

On construit l'automate à pile déterministe $\overline{\mathscr{A}_2}$ qui reconnaît $\Sigma^* \backslash L(\mathscr{A}_2)$ avec le théorème de clôture par complémentation.

La fonction qui calcule cet automate est bien **calculable**.

De plus :

$$L(\mathscr{A}_1) \cap L(\mathscr{A}_2) = \emptyset \iff L(\mathscr{A}_1) \subseteq \Sigma^* \backslash L(\mathscr{A}_2) = L(\overline{\mathscr{A}_2})$$

d'où :

$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ est une instance positive de $\mathscr{P}_{int\_vide}$ si, et seulement si $(\mathscr{A}_1, \overline{\mathscr{A}_2})$ est une instance positive de $\mathscr{P}_{inclusion}$.

> On a donc réduit $\mathscr{P}_{int\_vide}$, qui est indécidable, à $\mathscr{P}_{inclusion}$: $\mathscr{P}_{inclusion}$ est donc indécidable.

b).

On réduit $\mathscr{P}_{int\_vide}$ à ce problème $\mathscr{P}_{univ}$.

Soit $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ une instance de $\mathscr{P}_{int\_vide}$ ($\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ sont des DPDA).

On construit les automates à pile déterministes $\overline{\mathscr{A}_1}$ et $\overline{\mathscr{A}_2}$ qui reconnaissent respectivement $\Sigma^* \backslash L(\mathscr{A}_1)$ et $\Sigma^* \backslash L(\mathscr{A}_2)$, avec le théorème de clôture par complémentation.

Puis, on construit l'automate à pile $\mathscr{A}_{union}$ reconnaissant $\Sigma^* \backslash L(\mathscr{A}_1) \cup \Sigma^* \backslash L(\mathscr{A}_2)$ (d'après l'**EX 3. 3)** du TD4), les langages algébriques sont clos par union).

La fonction qui calcule ces automates est bien **calculable**.

De plus :

$$\begin{aligned} L(\mathscr{A}_1) \cap L(\mathscr{A}_2) = \emptyset &\iff \Sigma^* \backslash \big(L(\mathscr{A}_1) \cap L(\mathscr{A}_2)\big) = \Sigma^* \\ &\iff \underbrace{\Sigma^* \backslash L(\mathscr{A}_1) \cup \Sigma^* \backslash L(\mathscr{A}_2)}_{= L(\mathscr{A}_{union})} = \Sigma^* \end{aligned}$$

d'où :

$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ est une instance positive de $\mathscr{P}_{int\_vide}$ si, et seulement si $\mathscr{A}_{union}$ est une instance positive de $\mathscr{P}_{univ}$.

> On a donc réduit $\mathscr{P}_{int\_vide}$, qui est indécidable, à $\mathscr{P}_{univ}$: $\mathscr{P}_{univ}$ est donc indécidable.