DM de $\boldsymbol{\lambda}$-calcul

Younesse Kaddar.

- Énoncé
- Version PDF
- http://younesse.net/Lambda-calcul/DM_LambdaCalcul/

I. Les modèles de graphes

1.

Soit $(B_i)_{i \in I} \in \mathbb{P}(D)^I$ une famille dirigée telle que

$$B \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in I} B_i$$

et $E \overset{\text{def}}{=} \{e_j\}_{j \in [\![1,n]\!]} \subseteq B$ une partie finie de D.

Comme $E \subseteq B$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $i_j \in I$ tel que

$$e_j \in B_{i_j}$$

Or comme $(B_i)_{i \in I}$ est dirigée et $\{B_{i_j}\}_{j \in [\![1,n]\!]}$ est finie, il existe $i \in I$ tel que

$$B_i \;\; \text{majore} \;\; \{B_{i_j}\}_{j \in [\![1,n]\!]}$$

i.e :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \; B_{i_j} \subseteq B_i$$

Par suite :

$$E \overset{\text{def}}{=} \{e_j\}_{j \in [\![1,n]\!]} \subseteq \bigcup_{j \in [\![1,n]\!]} B_{i_j} \subseteq B_i$$

On a donc montré que :

> Il existe un $i \in I$ tel que
>
> $$E \subseteq B_i$$

2.

Soit $A \in \mathbb{P}(D)$.

Montrons que

> $i_D(A) : \mathbb{P}(D) \longrightarrow \mathbb{P}(D)$ est Scott-continue

1. *Elle est monotone* :
   Si $B, B' \in \mathbb{P}(D)$ sont telles que $B \subseteq B'$:

$$\begin{aligned} i_D(A)(B) &\overset{\text{def}}{=} \; \{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D); \; E \subseteq B \text{ et } (E \longrightarrow_D d) \in A\} \\ &\subseteq \{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D); \; E \subseteq B' \supseteq B \text{ et } (E \longrightarrow_D d) \in A\} = i_D(A)(B') \end{aligned}$$

2. *Elle préserve les sups dirigés* :
   Soit $(B_i)_{i \in I} \in \mathbb{P}(D)^I$ une famille dirigée.

   - $$\bigcup_{i \in I} i_D(A)(B_i) \leq i_D(A)\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big)$$

     vient du fait que : $\forall i \in I, \; i_D(A)(B_i) \leq i_D(A)(\bigcup_{i \in I} B_i)$, par monotonie de $i_D(A)$

   - $$\begin{aligned} i_D(A)\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) &= \Big\{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D); \; E \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i \text{ et } (E \longrightarrow_D d) \in A\Big\} \\ &= \Big\{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D); \; \exists i \in I; \; E \subseteq B_i \text{ et } (E \longrightarrow_D d) \in A\Big\} && \text{(par I.1))} \\ &= \Big\{d \in D \mid \exists i \in I; \; \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D); \; E \subseteq B_i \text{ et } (E \longrightarrow_D d) \in A\Big\} \\ &\subseteq \bigcup_{i \in I} \Big\{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D); \; E \subseteq B_i \text{ et } (E \longrightarrow_D d) \in A\Big\} \\ &= \bigcup_{i \in I} i_D(A)(B_i) \end{aligned}$$

     Donc

$$\bigcup_{i\in I} i_D(A)(B_i) = i_D(A)\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big)$$

- i_D elle-même est Scott-continue de $\mathbb{P}(D)$ vers $[\mathbb{P}(D) \longrightarrow \mathbb{P}(D)]$
- r_D est Scott-continue
- $i_D \circ r_D = id_{\mathbb{P}(D)}$

- $D[\![x]\!]\rho = \rho(x)$
- $D[\![uv]\!]\rho = i_D(D[\![u]\!]\rho)(D[\![v]\!]\rho)$
- $D[\![\lambda x.\, u]\!]\rho = r_D(A \mapsto D[\![u]\!](\rho[x := A]))$
- pour tous λ-termes u, v β-équivalents, pour tout environnement ρ, $D[\![u]\!]\rho = D[\![v]\!]\rho$
- $\mathbb{P}_{fin}(D) \ni A \mapsto D[\![u]\!](\rho[x := A])$, pour n'importe quel terme u et n'importe quel environnement ρ, est Scott-continue.

3.

Soient x, y deux variables distinctes.

$$\begin{aligned} D[\![\lambda x.\, x]\!] &= r_D(A \mapsto \underbrace{D[\![x]\!](x \mapsto A)}_{=A}) \\ &= \{E \longrightarrow_D d \mid E \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d \in E\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[\![\lambda x, y.\, xy]\!] &= r_D\Big(A \mapsto \underbrace{D[\![\lambda y.\, xy]\!](x \mapsto A)}_{=\, r_D(B \mapsto D[\![xy]\!](x\mapsto A,\, y\mapsto B))}\Big) \\ &= r_D\Big(A \mapsto r_D\big(B \mapsto \underbrace{D[\![xy]\!](x \mapsto A,\ y \mapsto B)}_{=\, i_D(A)(B)}\big)\Big) \\ &= r_D(A \mapsto r_D \circ i_D(A)) \\ &= \{E \longrightarrow_D d \mid E \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d \in r_D \circ i_D(E)\} \end{aligned}$$

Or, $\forall E \in \mathbb{P}_{fin}(D)$:

$$\begin{aligned} r \circ i_D(E) &= \{E' \longrightarrow_D d' \mid E' \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d' \in i_D(E)(E')\} \\ &= \Big\{E' \longrightarrow_D d' \mid E' \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d' \in \{d'' \in D \mid \exists E'' \in \mathbb{P}_{fin}(D);\ E'' \subseteq E' \text{ et } (E'' \longrightarrow_D d'') \in E\}\Big\} \\ &= \Big\{E' \longrightarrow_D d' \mid E' \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d' \in D;\ \exists E'' \subseteq E';\ (E'' \longrightarrow_D d') \in E\Big\} \end{aligned}$$

Donc

$$D[\![\lambda x, y.\, xy]\!] = \Big\{E \longrightarrow_D (E' \longrightarrow_D d') \mid E, E' \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d' \in D;\ \exists E'' \subseteq E' \text{ et } (E'' \longrightarrow_D d') \in E\Big\}$$

Comme $\longrightarrow_D$: $\mathbb{P}_{fin}(D) \times D \longrightarrow D$ est injective et D est non vide, D est infini, et il existe deux élément $d, d' \in D$ tels que $d \neq d'$.

Il vient alors que :

$$\big\{\{d\} \longrightarrow_D d\big\} \longrightarrow_D (\{d, d'\} \longrightarrow_D d) \in D[\![\lambda x, y.\, xy]\!] \backslash D[\![\lambda x.\, x]\!]$$

puisque

- $\{d\} \subseteq \{d, d'\}$ et $\{d\} \longrightarrow_D d \in \big\{\{d\} \longrightarrow_D d\big\}$
- mais $\{d, d'\} \longrightarrow_D d \notin \big\{\{d\} \longrightarrow_D d\big\}$

On a donc montré que

> aucun modèle de graphe $(D, \longrightarrow_D)$ ne valide la η-règle

4.

$$\begin{aligned} D[\![\lambda x.\, xx]\!] &= r_D\Big(A \mapsto \underbrace{D[\![xx]\!](x \mapsto A)}_{=\, i_D(A)(A)}\Big) \\ &= \{E' \longrightarrow_D d' \mid E' \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d' \in i_D(E')(E')\} \\ &= \Big\{E' \longrightarrow_D d' \mid E' \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d' \in \{d'' \in D \mid \exists E'' \subseteq E' \text{ et } (E'' \longrightarrow_D d'') \in E'\}\Big\} \\ &= \{E' \longrightarrow_D d' \mid E' \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d' \in D;\ \exists E'' \subseteq E' \text{ et } (E'' \longrightarrow_D d') \in E'\} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} D[\![\Omega]\!] &= i_D(D[\![\lambda x.\, xx]\!])(D[\![\lambda x.\, xx]\!]) \\ &= \{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D);\ E \subseteq D[\![\lambda x.\, xx]\!] \text{ et } (E \longrightarrow_D d) \in D[\![\lambda x.\, xx]\!]\} \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe $d \in D[\![\Omega]\!]$.

Il existe alors $E_0 \in \mathbb{P}_{fin}(D)$ tel que

$E_0 \subseteq D[\![\lambda x.\, xx]\!]$ et

$$\underbrace{(E_0 \longrightarrow_D d) \in D[\![\lambda x.\, xx]\!]}_{\text{d'où l'existence d'un } E_1 \subseteq E_0 \subseteq D[\![\lambda x. xx]\!] \text{ tel que } \underbrace{(E_1 \longrightarrow_D d) \in E_0 \subseteq D[\![\lambda x. xx]\!]}_{\text{d'où l'existence d'un } E_2 \subseteq E_1 \subseteq D[\![\lambda x. xx]\!] \text{ tel que } \underbrace{(E_2 \longrightarrow_D d) \in E_1 \subseteq D[\![\lambda x. xx]\!]}_{\text{d'où l'existence d'un } E_3 \subseteq E_2 \subseteq D[\![\lambda x. xx]\!] \text{ tel que } \underbrace{(E_3 \longrightarrow_D d) \in E_2 \subseteq D[\![\lambda x. xx]\!]}_{\vdots}}}}$$

$$\text{d'où l'existence d'un } E_{n+1} \subseteq E_n \subseteq D[\![\lambda x. xx]\!] \text{ tel que } (E_{n+1} \longrightarrow_D d) \in E_n \subseteq D[\![\lambda x. xx]\!]$$

On peut ainsi construire une suite décroissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D[\![\lambda x.\, xx]\!]^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(E_{n+1} \longrightarrow_D d) \in E_n \qquad \circledast$$

Comme $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et E_0 est finie, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationne en une partie $E_\infty \subseteq E_0 \in \mathbb{P}_{fin}(D)$ qui vérifie, par $\circledast$:

$$(E_\infty \longrightarrow_D d) \in E_\infty$$

On a donc montré que :

> si $d \in d \in D[\![\Omega]\!]$, alors il existe $E_\infty \in \mathbb{P}_{fin}(D)$ tel que
>
> $$(E_\infty \longrightarrow_D d) \in E_\infty$$

5.

NB : Pour tout arbre $d \in \mathcal{E}_C$, on notera $size(d)$ la *taille* de d, c'est-à-dire son nombre de noeuds (noeuds internes et feuilles).

S'il existait $d \in \mathcal{E}_C[\![\Omega]\!] \neq \emptyset$, par **I.4)**, il existerait un $E \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C)$ tel que l'arbre **fini** $E \longrightarrow d$ appartiendrait à son fils gauche E, ce qui est absurde puisqu'alors :

$$\begin{aligned} size(E \longrightarrow d) &= 1 + size(d) + \sum_{d' \in E} size(d') \\ &= \underbrace{1 + size(d) + \sum_{d' \in E \setminus \{E \longrightarrow d\}}}_{\geq 0} size(d') + size(E \longrightarrow d) \end{aligned}$$

On a donc montré que

> $$\mathcal{E}_C[\![\Omega]\!] = \emptyset$$

6.

Supposons qu'il existe un test de normalisabilité de tête t.

Par **II.5)** :

$$\mathcal{E}_C[\![\Omega]\!] = \emptyset \subseteq \mathcal{E}_C[\![\lambda x.\, x]\!]$$

donc par monotonie de $i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![t]\!])$:

$$\mathcal{E}_C[\![t\Omega]\!] = i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![t]\!])(\mathcal{E}_C[\![\Omega]\!]) \subseteq i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![t]\!])(\mathcal{E}_C[\![\lambda x.\, x]\!]) = \mathcal{E}_C[\![t(\lambda x.\, x)]\!] \quad \circledast$$

Or, Ω n'a pas de forme normale de tête.

- *en effet* : on a vu en cours qu'on peut écrire tout λ-terme u de façon **unique** sous la forme de tête

  $$\lambda x_1, \dots, x_n.\ \underbrace{h}_{\text{tête de } u}\ u_1 \cdots u_m$$

  où
  - $hu_1 \dots u_m$ n'est pas une abstraction
  - h n'est pas une application
  - $n, m \geq 0$

  Or, la forme de tête de Ω :

  $$\underbrace{\underbrace{(\lambda x.\, xx)}_{\text{tête de } \Omega}(\lambda x.\, xx)}_{\text{rédex de tête de } u}$$

  n'est pas une forme normale de tête (le tête n'est pas une variable).

Par suite,

- comme $t\Omega$ et $\mathbf{F}$ sont β-équivalents, $\mathcal{E}_C[\![t\Omega]\!] = \mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}]\!]$
- de même, $\mathcal{E}_C[\![t(\lambda x.\, x)]\!] = \mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}]\!]$ ($\lambda x.\, x$ est déjà en forme normale de tête)

Donc, par ⊛ :

$$\mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}]\!] \subseteq \mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}]\!]$$

On a montré que :

> S'il existe un test de normalisabilité de tête t, alors
>
> $$\mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}]\!] \subseteq \mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}]\!]$$

7.

Supposons qu'il existe un test de normalisabilité de tête, ce qui implique, par **II.6)**, que $\mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}]\!] \subseteq \mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}]\!]$.

Alors pour toutes variables x et y :

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}x]\!] = i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}]\!])([\![x]\!]) \subseteq i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}]\!])([\![x]\!]) = \mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}x]\!] \\ \Longrightarrow\ &\mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}xy]\!] = i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}x]\!])([\![y]\!]) \subseteq i_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}x]\!])([\![y]\!]) = \mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}xy]\!] \quad ⊛ \end{aligned}$$

par monotonie de $i_{\mathcal{E}_C}$ (l'ordre sur $[\mathbb{P}(\mathcal{E}_C) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_C)]$ étant l'ordre point à point).

Or, pour tout environnement ρ **non constant**, il existe deux variables x et y telles que :

$$\left. \begin{cases} \rho(y) \nsubseteq \rho(x) \\ \mathcal{E}_C[\![\mathbf{F}xy]\!] = \mathcal{E}_C[\![y]\!] = \rho(y) & (\text{car } \mathbf{F}xy =_\beta y\ ) \\ \mathcal{E}_C[\![\mathbf{V}xy]\!] = \mathcal{E}_C[\![x]\!] = \rho(x) & (\text{car } \mathbf{V}xy =_\beta x\ ) \end{cases} \right) ⊛⊛$$

Et comme il existe un environnement non constant (car $\mathcal{E}_C$ est infini, comme on l'a vu en **I.3)**), ⊛⊛ contredit ⊛.

> On a donc montré qu'il n'existe pas de test de normalisabilité de tête.

8.

Soit t un terme qui a une forme normale de tête.

$$t =_\beta \underbrace{\lambda x_1, \ldots, x_n.\ \underbrace{h}_{\text{variable de tête}}\ u_1 \cdots u_m}_{\text{forme normale de tête}}$$

Remarquons que si t n'est pas clos, le terme $\lambda y_1, \ldots, y_k.\, t$, où $\{y_1, \cdots, y_k\} = fv(t)$, a encore une forme normale de tête :

$$\lambda y_1, \ldots, y_k t =_\beta \lambda y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n.\, h u_1 \cdots u_m$$

Donc quitte à considérer $\lambda y_1, \ldots, y_k.\, t$ (d'après la définition de la résolubilité d'un terme non clos), on peut supposer que t est clos.

Comme t est clos, $\lambda x_1, \ldots, x_n.\, h u_1 \cdots u_m$ est clos, puisque les β-réductions ne font pas apparaître de nouvelles variables libres.

- *en effet* :
  > Si
  >
  > - $(\lambda x.\, u)v \longrightarrow_\beta u[x := v]$
  > - et $fv\big((\lambda x.\, u)v\big) \overset{\text{def}}{=} \big(fv(u) \backslash \{x\}\big) \cup fv(v) = \emptyset$
  >
  > alors $fv(u[x := v]) = \emptyset$

  Preuve : par induction structurelle sur u :
  - si $u = x$:
    $u[x := v] = v$ et on a bien $fv(u[x := v]) = fv(v) = \emptyset$
  - si u est une variable $y \neq x$:
    $u[x := v] = y = u$, d'où

    $$\begin{aligned} fv(u[x := v]) &= fv(u) \\ &= \{y\} \\ &= \{y\} \backslash \{x\} \\ &= fv(u) \backslash \{x\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

  - si $u = u_1 u_2$
    $\underbrace{fv(u)}_{= fv(u_1) \cup fv(u_2)} \backslash \{x\} = \emptyset$ implique que
    - $fv(u_1) \backslash \{x\} = \emptyset$
    - $fv(u_2) \backslash \{x\} = \emptyset$

    donc, comme $fv(v) = \emptyset$:
    - $\big(fv(u_1) \backslash \{x\}\big) \cup fv(v) = \emptyset$
    - $\big(fv(u_2) \backslash \{x\}\big) \cup fv(v) = \emptyset$

    et par hypothèse de récurrence sur u_1 et u_2 :

$$fv(u_1[x := v]) = \emptyset = fv(u_2[x := v])$$

donc, comme $u[x := v] = (u_1[x := v])(u_2[x := v])$:

$$fv(u[x := v]) = fv(u_1[x := v]) \cup fv(u_2[x := v]) = \emptyset$$

- si $u = \lambda y.\, u'$:
  $u[x := v] = \lambda y.\, (u'[x := v])$, et :

$$fv(u[x := v]) = fv(u'[x := v]) \backslash \{y\} = \emptyset$$

par hypothèse de récurrence sur u', puisque

$$\big(\underbrace{fv(u')}_{\subseteq fv(u)} \backslash \{x\}\big) \cup fv(v) \subseteq \big(fv(u) \backslash \{x\}\big) \cup fv(v) = \emptyset$$

Donc h est nécessairement l'un des x_i : $h \overset{\text{def}}{=} x_i$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
t\, \underbrace{x_1 \cdots x_{i-1} (\lambda y_1, \ldots, y_m.\, \mathbf{I}) x_{i+1} \cdots x_n}_{\overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{u}} &=_\beta \overbrace{\Big(\big(\lambda x_1.\, (\lambda x_2, \ldots, x_n.\, x_i u_1 \cdots u_m)\big) x_1\Big)}^{\longrightarrow_\beta\ \lambda x_2, \ldots, x_n.\ x_i u_1 \cdots u_m}\ x_2 \cdots x_{i-1} (\lambda y_1, \ldots, y_m.\, \mathbf{I}) x_{i+1} \cdots x_n \\
&=_\beta \overbrace{\Big(\big(\lambda x_2.\, (\lambda x_3, \ldots, x_n.\, x_i u_1 \cdots u_m)\big) x_2\Big)}^{\longrightarrow_\beta\ \lambda x_3, \ldots, x_n.\ x_i u_1 \cdots u_m}\ x_3 \cdots x_{i-1} (\lambda y_1, \ldots, y_m.\, \mathbf{I}) x_{i+1} \cdots x_n \\
&\ \vdots \\
&=_\beta \overbrace{\Big(\big(\lambda x_{i-2}.\, (\lambda x_{i-1}, \ldots, x_n.\, x_i u_1 \cdots u_m)\big) x_{i-2}\Big)}^{\longrightarrow_\beta\ \lambda x_{i-1}, \ldots, x_n.\ x_i u_1 \cdots u_m}\ x_{i-1} (\lambda y_1, \ldots, y_m.\, \mathbf{I}) x_{i+1} \cdots x_n \\
&=_\beta \overbrace{\Big(\big(\lambda x_{i-1}.\, (\lambda x_i, \ldots, x_n.\, x_i u_1 \cdots u_m)\big) x_{i-1}\Big)}^{\longrightarrow_\beta\ \lambda x_i, \ldots, x_n.\ x_i u_1 \cdots u_m}\ (\lambda y_1, \ldots, y_m.\, \mathbf{I}) x_{i+1} \cdots x_n \\
&=_\beta \Big(\big(\lambda x_i.\, (\lambda x_{i+1}, \ldots, x_n.\, x_i u_1 \cdots u_m)\big)(\lambda y_1, \ldots, y_m.\, \mathbf{I})\Big)\ x_{i+1} \cdots x_n \\
&=_\beta \Big(\lambda x_{i+1}, \ldots, x_n.\ \underbrace{(\lambda y_1, \ldots, y_m.\, \mathbf{I})\big(u_1[x_i := \lambda y_1, \ldots, y_m.\, \mathbf{I}]\big) \cdots \big(u_m[x_i := \lambda y_1, \ldots, y_m.\, \mathbf{I}]\big)}_{\longrightarrow_\beta^m\ \mathbf{I}}\Big)\ x_{i+1} \cdots x_n \\
&=_\beta \Big(\lambda x_{i+1}, \ldots, x_n.\ \mathbf{I}\Big)\ x_{i+1} \cdots x_n \\
&=_\beta \mathbf{I}
\end{aligned}$$

On a donc montré que

> Si un terme t a une forme normale de tête, il est résoluble.

9.

Soit t un terme clos résoluble, *i.e* il existe une suite $\overrightarrow{u}$ telle que $t\overrightarrow{u} =_\beta \mathbf{I}$.

Par l'absurde : Supposons que $D[\![t]\!] = \emptyset$.

Alors

$$i_D(D[\![t]\!]) = i_D(\emptyset) = \begin{cases} \mathbb{P}(D) & \longrightarrow \mathbb{P}(D) \\ B & \mapsto \ \{d \in D \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(D);\ E \subseteq B \text{ et } (E \longrightarrow_D d) \in \emptyset\} \\ & \quad = \emptyset \end{cases}$$

i.e :

$$i_D(D[\![t]\!]) = \mathbb{P}(D) \longrightarrow \mathbb{P}(D), B \mapsto \emptyset \qquad \circledast$$

Par ailleurs :

$$D[\![t\overrightarrow{u}]\!] = \begin{cases} D[\![\mathbf{I}]\!] = \{E \longrightarrow_D d \mid E \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d \in E\} \\ i_D(D[\![t]\!])(D[\![\overrightarrow{u}]\!]) = \emptyset & \qquad\qquad (\text{par } \circledast\,) \end{cases}$$

Donc $\{E \longrightarrow_D d \mid E \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d \in E\} = \emptyset \quad \circledast\circledast$.

Or, comme D est non vide, il existe $d \in D$, d'où :

$$\{d\} \longrightarrow d \in \{E \longrightarrow_D d \mid E \in \mathbb{P}_{fin}(D),\ d \in E\} \neq \emptyset$$

ce qui contredit ⊛⊛.

On a donc montré que :

> tout terme t clos et résoluble vérifie
>
> $$D[\![t]\!] = \emptyset$$

10.

> $\Omega \overset{\text{def}}{=} (\lambda x.\, xx)(\lambda x.\, xx)$ n'est pas résoluble.

en effet :

Méthode 1 :

On a montré en **III. 9)** que, pour tout terme t : *si* t est résoluble, *alors* pour tout modèle de graphes $(D, \longrightarrow_D)$, $D[\![t]\!] \neq \emptyset$.

Par contraposée, pour tout terme t : s'il existe un modèle de graphes $(D, \longrightarrow_D)$ tel que $D[\![t]\!] = \emptyset$, alors t n'est pas résoluble.

Or, par **II.5)** : $\mathcal{E}_C[\![\Omega]\!] = \emptyset$. Donc Ω n'est pas résoluble.

Méthode 2 :

S'il existait une suite $\overrightarrow{u}$ telle que $\Omega\overrightarrow{u} =_\beta \mathbf{I}$, alors $\Omega\overrightarrow{u}$ serait faiblement normalisant, et d'après le **théorème de standardisation**, la réduction gauche $\longrightarrow_g^*$ calculerait la forme normale de $\Omega\overrightarrow{u}$ (c'est-à-dire $\mathbf{I}$) par une réduction finie.

Or, elle boucle indéfiniment :

$$\underline{(\lambda x.\, xx)(\lambda x.\, xx)}\,\overrightarrow{u} \longrightarrow_{\text{lm}} \underline{(\lambda x.\, xx)(\lambda x.\, xx)}\,\overrightarrow{u} \longrightarrow_{\text{lm}} \cdots$$

11.

Soit S' un ensemble saturé.

Montrons que, pour tout ensemble S, $S \Longrightarrow S'$ est saturé.

Soit S un ensemble, soit $u[x := t]v_1v_2\cdots v_n \in S \Longrightarrow S'$.

Montrons que $(\lambda x.\, u)tv_1v_2\cdots v_n \in S \Longrightarrow S'$, *i.e* que pour tout $v \in S$, $(\lambda x.\, u)tv_1v_2\cdots v_nv \in S'$.

Soit $v \in S$.

Comme $u[x := t]v_1v_2\cdots v_n \in S \Longrightarrow S'$:

$$u[x := t]v_1v_2\cdots v_nv \in S'$$

et comme S' est saturé :

$$(\lambda x.\, u)tv_1v_2\cdots v_nv \in S'$$

Le résultat est acquis.

On a montré que

> Si S' est saturé, $S \Longrightarrow S'$ le reste pour tout ensemble S.

12.

Soient t un λ-terme dont la réduction de tête

$$t \longrightarrow_t t_1 \longrightarrow_t t_2 \longrightarrow_t \cdots$$

ne termine pas, et x une variable.

Par l'absurde : supposons que la réduction de tête de tx termine.

Alors nécessairement, l'un des t_i est une λ-abstraction.

- *car sinon* : tx a une réduction de tête infinie :

  $$tx \longrightarrow_t t_1x \longrightarrow_t t_2x \longrightarrow_t \cdots$$

  puisqu'aucun t_ix n'est un rédex qui se contracte.

Notons i le plus petit indice tel que t_i est une λ-abstraction :

$$t_i \overset{\text{def}}{=} \lambda y.\, u$$

Alors

$$tx \longrightarrow_t t_1x \longrightarrow_t \cdots \longrightarrow_t \underbrace{t_i}_{=\lambda y.u}\, x \longrightarrow_t u[y := x]$$

où $u[y := x]$ a une réduction de tête finie (puisque c'est le cas de tx).

Montrons que

> le fait que $u[y := x]$ ait une réduction de tête finie implique que u a une réduction de tête finie.

Preuve :

Par l'absurde, si u avait une réduction de tête infinie :

$$u \longrightarrow_t u_1 \longrightarrow_t u_2 \longrightarrow_t \cdots$$

montrons que $u[y := x]$ aurait la réduction de tête infinie :

$$u[y := x] \longrightarrow_t u_1[y := x] \longrightarrow_t u_2[y := x] \longrightarrow_t \cdots$$

- *En effet* : il suffit (le reste s'ensuit de manière immédiate) de montrer que :

  > si $u \longrightarrow_t u_1$, alors $u[y := x] \longrightarrow_t u_1[y := x]$

  Preuve : supposons que

  $$u \overset{\text{def}}{=} \lambda x_1, \ldots, x_n.\, \underbrace{(\lambda z.\, v)u'_1}_{\text{rédex de tête}} \cdots u'_m \longrightarrow_t \lambda x_1, \ldots, x_n.\, v[z := u'_1]u'_2 \cdots u'_m \overset{\text{def}}{=} u_1$$

  NB : u n'est pas en forme normale de tête car sinon la réduction de tête s'arrête.
  Alors

  $$\begin{cases} u[y := x] & = \lambda x_1, \ldots, x_n.\, \overbrace{\big((\lambda z.\, v)[y := x]\big)}^{\overset{\text{def}}{=} \lambda z.(v[y:=x]) \quad ⊛} \, (u'_1[y := x])(u'_1[y := x]) \cdots (u'_m[y := x]) \\ & \longrightarrow_t \lambda x_1, \ldots, x_n.\, (v[y := x])\Big[z := u'_1[y := x]\Big]\, (u'_2[y := x]) \cdots (u'_m[y := x]) \\ \\ u_1[y := x] & = \lambda x_1, \ldots, x_n.\, \big(v[z := u'_1][y := x]\big)\, (u'_2[y := x]) \cdots (u'_m[y := x]) \end{cases}$$

  Or :

  $$v[y := x]\big[z := u'_1[y := x]\big] = v[z := u'_1][y := x]$$

  - *en effet* : on suppose, modulo α-renommage, que
    - y est substituable par x dans $\lambda z.\, v$ (⊛), *i.e*

      $$y, x \notin bv(v) \cup \{z\}$$

    - y est substituable par x dans u'_1, *i.e*

      $$y, x \notin bv(u'_1)$$

    - z est substituable par $u'_1[y := x]$ dans $v[y := x]$, *i.e*

      $$z, fv(u'_1[y := x]) \notin bv(v[y := x])$$

    - z est substituable par u'_1 dans v, *i.e*

      $$z, fv(u'_1) \notin bv(v)$$

    - y est substituable par x dans $v[z := u'_1]$, *i.e*

      $$y, x \notin bv(v[z := u'_1])$$

    et on le montre par induction structurelle sur v :
    - si v est une variable $x' \notin \{y, z\}$:

      $$\begin{cases} x'[y := x]\big[z := u'_1[y := x]\big] = x' \\ x'[z := u'_1][y := x] = x' \end{cases}$$

    - si $v = y$:

      $$\begin{cases} y[y := x]\big[z := u'_1[y := x]\big] = x\big[z := u'_1[y := x]\big] = x & (x \neq z) \\ y[z := u'_1][y := x] = y[y := x] = x & (y \neq z) \end{cases}$$

    - si $v = z$:

      $$\begin{cases} z[y := x]\big[z := u'_1[y := x]\big] = z\big[z := u'_1[y := x]\big] = u'_1[y := x] & (z \neq y) \\ z[z := u'_1][y := x] = u'_1[y := x] \end{cases}$$

    - si $v = v_1 v_2$:

      $$\begin{cases} (v_1 v_2)[y := x]\big[z := u'_1[y := x]\big] = \Big(v_1[y := x]\big[z := u'_1[y := x]\big]\Big)\Big(v_2[y := x]\big[z := u'_1[y := x]\big]\Big) \\ (v_1 v_2)[z := u'_1][y := x] = \Big(v_1[z := u'_1][y := x]\Big)\Big(v_2[z := u'_1][y := x]\Big) \end{cases}$$

      et on conclut avec

      $$\begin{cases} v_1[y := x]\big[z := u'_1[y := x]\big] = v_1[z := u'_1][y := x] \\ v_2[y := x]\big[z := u'_1[y := x]\big] = v_2[z := u'_1][y := x] \end{cases}$$

      par hypothèse de récurrence, puisque

      $$\begin{cases} bv(v) = bv(v_1) \cup bv(v_2) \\ bv(v[y := x]) = bv(v_1[y := x]) \cup bv(v_2[y := x]) \\ bv(v[z := u'_1]) = bv(v_1[z := u'_1]) \cup bv(v_2[z := u'_1]) \end{cases}$$

      d'où le fait que les hypothèses de "substituabilité" restent vérifiées

- si $v = \lambda z_1. v_1$:

$$\begin{cases} v[y := x]\left[z := u_1'[y := x]\right] = \lambda z_1. \left(v_1[y := x]\left[z := u_1'[y := x]\right]\right) \\ v[z := u_1'][y := x] = \lambda z_1. \left(v_1[z := u_1'][y := x]\right) \end{cases}$$

et on conclut avec

$$v_1[y := x]\left[z := u_1'[y := x]\right] = v_1[z := u_1'][y := x]$$

par hypothèse de récurrence, puisque

$$\begin{cases} bv(v) = bv(v_1) \cup \{z\} \\ bv(v[y := x]) = bv(v_1[y := x]) \cup \{z\} \\ bv(v[z := u_1']) = bv(v_1[z := u_1']) \cup \{z\} \end{cases}$$

d'où le fait que les hypothèses de "substituabilité" restent vérifiées

Donc

$$\begin{aligned} u[y := x] &\longrightarrow_t \lambda x_1, \dots, x_n. \underline{(v[y := x])\left[z := u_1'[y := x]\right]}\, (u_2'[y := x]) \cdots (u_m'[y := x]) \\ &= \lambda x_1, \dots, x_n. \underline{\left(v[z := u_1'][y := x]\right)}\, (u_2'[y := x]) \cdots (u_m'[y := x]) \\ &= u_1[y := x] \end{aligned}$$

et le résultat est acquis.

Comme $u[y := x]$ a une réduction de tête finie, il vient donc que u a une réduction de tête finie.

Par suite, $\lambda y. u = t_i$ a une réduction de tête finie.

- *en effet* : comme u a une réduction de tête finie de la forme :

$$u \longrightarrow_t u_1 \longrightarrow_t \cdots \longrightarrow_t u_n$$

il s'ensuit que $\lambda y. u$ a la réduction de tête finie :

$$\lambda y. u \longrightarrow_t \lambda y. u_1 \longrightarrow_t \cdots \longrightarrow_t \lambda y. u_n$$

Or, cela contredit le fait que t ait une réduction de tête infinie, puisque

$$t \longrightarrow_t t_1 \longrightarrow_t t_2 \longrightarrow_t t_i = \lambda y. u$$

On a donc montré que

> *Si* t est un λ-terme dont la réduction de tête ne termine pas, et x une variable, *alors* la réduction de tête de tx ne termine pas non plus.

13.

Soit S' un K-candidat, et S un ensemble de λ-termes contenant au moins une variable.

Montrons que $S \Longrightarrow S'$ est un K-candidat.

1. $S \Longrightarrow S'$ est saturé

En effet : on applique **IV. 11)**, puisque S' est saturé (car S' est un K-candidat).

2. $S_0 \subseteq S \Longrightarrow S'$

Si $x \overrightarrow{u} \in S_0$, montrons que $x \overrightarrow{u} \in S \Longrightarrow S'$.

Soit $v \in S$.

Montrons que $x \overrightarrow{u} v \in S'$.

C'est le cas puisque $S_0 \subseteq S'$ (car S' est un K-candidat) et :

$$x \overrightarrow{u} v \in S_0 \subseteq S'$$

Donc $x \overrightarrow{u} \in S \Longrightarrow S'$, et

$$S_0 \subseteq S \Longrightarrow S'$$

3. $S \Longrightarrow S' \subseteq S_h$

Si $u \in S \Longrightarrow S'$, montrons que $u \in S_h$.

Comme $u \in S \Longrightarrow S'$ et $S' \subseteq S_h$ (car S' est un K-candidat) :

$$\forall v \in S, uv \in S' \subseteq S_h$$

Par conséquent, pour toute variable $x \in S$: ux a une réduction de tête finie, ce qui implique, par contraposée de **IV. 12)**, que u aussi, c'est-à-dire que $u \in S_h$.

Or, **il existe une variable** $x \in S$ par hypothèse : donc

$$u \in S_h$$

et il en résulte que

$$S \Longrightarrow S' \subseteq S_h$$

On a donc montré que

> Si S' est un K-candidat, et S un ensemble de λ-termes contenant au moins une variable, $S \Longrightarrow S'$ reste un K-candidat.

14.

Montrons, par induction structurelle sur le λ-terme t, que

> Si t est un λ-terme, et ρ, θ, d tels que :
>
> 1. $\rho : \overbrace{Var}^{\text{variables}} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_C)$
> 2. $\theta \overset{\text{def}}{=} [x_1 := v_1, \cdots, x_n := v_n]$ est une substitution telle que $dom(\theta) \overset{\text{def}}{=} \{x_1, \ldots, x_n\} \supseteq fv(t)$
> 3. $\forall i \in [\![1, n]\!], v_i \in I(\rho(x_i))$
> 4. $d \in \mathcal{E}_C [\![t]\!] \rho$
>
> *alors*
>
> $$t\theta \in I(d)$$

Si $t = x_1 \in Var$

alors

- $d \in \mathcal{E}_C [\![x_1]\!] \rho = \rho(x_1)$
- $\theta \overset{\text{def}}{=} [x_1 := v_1]$
- $v_1 \in I(\rho(x_1))$

d'où :

$$\begin{aligned} t\theta = v_1 &\in I(\rho(x_1)) \\ &= \bigcap_{d' \in \rho(x_1)} I(d') \\ &= \bigcap_{d' \in \rho(x_1) \backslash \{d\}} I(d') \cap I(d) \\ &\subseteq I(d) \end{aligned}$$

et le résultat est acquis.

Si $t = uv$

Alors

- comme

$$\begin{aligned} d \in \mathcal{E}_C [\![uv]\!] \rho = i_{\mathcal{E}_c}(\mathcal{E}_C [\![u]\!] \rho)(\mathcal{E}_C [\![v]\!] \rho) \\ = \left\{ d' \in \mathcal{E}_C \mid \exists E \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C);\ E \subseteq \mathcal{E}_C [\![v]\!] \rho \text{ et } E \longrightarrow_{\mathcal{E}_C} d' \in \mathcal{E}_C [\![u]\!] \rho \right\} \end{aligned}$$

  il existe $E \overset{\text{def}}{=} \{e_i\}_{i \in [\![1, N]\!]} \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C)$ telle que
  - $E \subseteq \mathcal{E}_C [\![v]\!] \rho$
  - et $E \longrightarrow_{\mathcal{E}_C} d \in \mathcal{E}_C [\![u]\!] \rho$
- pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $v\theta \in I(e_i)$ par hypothèse de récurrence sur v
  - qu'il est loisible d'appliquer puisque les conditions d'application *1.*, *2.* et *3.* restent vérifiées (comme $fv(v) \subseteq fv(t)$) et $e_i \in E \subseteq \mathcal{E}_C [\![v]\!] \rho$

  Donc

$$v\theta \in \bigcap_{i=1}^{N} I(e_i) = I(E)$$

- comme
  - $E \longrightarrow_{\mathcal{E}_C} d \in \mathcal{E}_C [\![u]\!] \rho$
  - les conditions d'application *1.*, *2.* et *3.* sont vérifiées pour u (comme $fv(u) \subseteq fv(t)$)

  alors par hypothèse de récurrence sur u :

$$u\theta \in I(E \longrightarrow_{\mathcal{E}_C} d) = I(E) \Longrightarrow I(d)$$

Par suite :

$$t\theta = (u\theta)(v\theta) \in I(d)$$

puisque $u\theta \in I(E) \Longrightarrow I(d)$ et $v\theta \in I(E)$.

Le résultat est acquis.

Si $t = \lambda x.\, u$

Alors

- comme

$$\begin{aligned} d \in \mathcal{E}_C[\![\lambda x.\, u]\!]\rho &= r_{\mathcal{E}_c}(A \mapsto \mathcal{E}_C[\![u]\!]\rho[x := A]) \\ &= \big\{E \longrightarrow_{\mathcal{E}_c} d' \mid E \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C),\ d' \in \mathcal{E}_C[\![u]\!]\rho[x := E]\big\} \end{aligned}$$

il existe $E \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C),\ d' \in \mathcal{E}_C[\![u]\!]\overbrace{\rho[x := E]}^{\overset{\text{def}}{=}\rho'}$ tels que

$$d = E \longrightarrow_{\mathcal{E}_c} d'$$

- pour tout $e \in I(E)$, comme
  - $\rho' \overset{\text{def}}{=} \rho[x := E] : Var \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_C)$
  - $\theta_e \overset{\text{def}}{=} \theta[x := e]$ est une substitution telle que

$$\begin{aligned} dom(\theta_e) &\overset{\text{def}}{=} \{x_1, \ldots, x_n, x\} \\ &= \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x\} \\ &\supseteq fv(t) \cup \{x\} \\ &= fv(u) \end{aligned}$$

  - $e \in I(\overbrace{E}^{=\rho'(x)}) = I(\rho'(x))$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], v_i \in I(\rho(x_i))$
  - $d' \in \mathcal{E}_C[\![u]\!]\rho'$

  alors par hypothèse de récurrence sur u :

$$u(\theta[x := e]) = u\theta_e \in I(d') \quad \circledast$$

Montrons que

$$t\theta = \lambda x.\, (u\theta) \in I(d) = I(E) \Longrightarrow I(d')$$

Soit $e \in I(E)$.

$$(t\theta)e = (\lambda x.\, (u\theta))e \longrightarrow_t (u\theta)[x := e] = \underbrace{u(\theta[x := e])}_{\in I(d') \text{ par } \circledast}$$

la dernière égalité venant du fait que $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq fv(t)$ et que x n'est libre dans aucun v_i, modulo α-renommage (cf. bas de la page 9 du cours, dans la démonstration de la terminaison de la β^*-réduction).

Or, $I(d')$ est clos par réduction de tête faible inverse (en tant que K-candidat), donc comme $(u\theta)[x := e] \in I(d')$:

$$(t\theta)e = (\lambda x.\, (u\theta))e \in I(d')$$

Donc $t\theta \in I(E) \Longrightarrow I(d') = I(d)$, et le résultat est acquis.

15.

Soit t un λ-terme tel qu'il existe un environnement ρ tel que $\mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho \neq \emptyset$.

Montrons que la réduction de tête partant de t termine, c'est-à-dire que $t \in S_h$.

On va utiliser le résultat de la question **IV. 14)** :

- il existe $d \in \mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho \neq \emptyset$, par hypothèse
- on peut prendre $\theta \overset{\text{def}}{=} [x_1 := x'_1, \cdots, x_n := x'_n]$
  - avec $\{x_1, \ldots, x_n\} = fv(t)$ et où les x'_i sont des variables deux à deux distinctes, différentes des x_i et n'apparaissant pas dans t

  puisque
  - $dom(\theta) \supseteq fv(t)$
  - $\forall i \in [\![1, n]\!], x'_i \in S_0 \subseteq I(\rho(x_i))$ puisque $I(\rho(x_i))$ *est un* K*-candidat* (d'où $S_0 \subseteq I(\rho(x_i))$).
    - *en effet* :
      - *si* $\rho(x_i) \neq \emptyset : I(\rho(x_i)) = \bigcap\limits_{d' \in \rho(x_i) \neq \emptyset} I(d')$, et les K-candidats sont clos par intersection non vide
      - *si* $\rho(x_i) = \emptyset : I(\rho(x_i)) = \bigcap\limits_{d' \in \emptyset} I(d') = S_h$ est un K-candidat

donc, par **IV. 14)** :

$$t =_\alpha t\theta \in I(d) \subseteq S_h$$

la dernière inclusion venant du fait que $I(d)$ est un K-candidat (d'où $I(d) \subseteq S_h$).

On a donc montré que :

> *Si* t est un λ-terme tel que $\mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho \neq \emptyset$ pour un environnement ρ, *alors* la réduction de tête partant de t termine.

16.

Eléments stricts de $\mathcal{E}_C$ ***:***

- $c \in C$
- ou $E \longrightarrow d$ où $E \neq \emptyset$ ne contient que des éléments stricts et d est strict.

Montrons que, pour tout terme clos t :

1. t a une forme normale
2. $\mathcal{E}_C[\![t]\!]$ contient un élément strict
3. t est normalisable par la gauche

sont des propriétés équivalentes.

$1. \Longrightarrow 2.$

On prouve par induction structurelle sur $t \in \Lambda$:

> *Lemme* : Si t a une forme normale, il existe un environnement ρ tel que
>
> - pour toute variable x, $\rho(x)$ est **fini** et **strict**
> - $\mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho$ contient un élément strict

- **Cas de base** : *si* $t = x \in Var$:
  c'est trivial, en prenant $\rho(y) \overset{\text{def}}{=} \{c\}$ pour toute variable y, et pour un $c \in C$ (il en existe un car $C \neq \emptyset$).

- **Hérédité** : *si* $t = uv$ *ou* $t = \lambda x.\, u$:
  On écrit t sous la forme de tête

$$t \overset{\text{def}}{=} \lambda x_1, \ldots, x_n.\; \underbrace{h}_{\text{tête de } t}\; u_1 \cdots u_m$$

Quitte à considérer la forme normale de t' de t, **qui vérifie** $\mathcal{E}_C[\![t']\!]\rho = \mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho$ pour tout environnement ρ, on peut supposer que t est sous forme normale, ce qui implique que h est une **variable** de tête.
En outre, pour tout ρ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho &= r_{\mathcal{E}_C}\big(A_1 \mapsto \mathcal{E}_C[\![\lambda x_2, \ldots, x_n.\, hu_1 \cdots u_m]\!]\rho[x_1 \mapsto A_1]\big) \\
&= \Big\{E_1 \longrightarrow d_1 \mid E_1 \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C),\ d_1 \in \mathcal{E}_C[\![\lambda x_2, \ldots, x_n.\, hu_1 \cdots u_m]\!]\rho[x_1 \mapsto E_1]\Big\} \\
&= \Big\{E_1 \longrightarrow d_1 \mid E_1 \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C),\ d_1 \in \Big\{E_2 \longrightarrow d_2 \mid E_2 \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C),\ d_2 \in \mathcal{E}_C[\![\lambda x_3, \ldots, x_n.\, hu_1 \cdots u_m]\!]\rho[x_1 \mapsto E_1, x_2 \mapsto E_2]\Big\}\Big\} \\
&= \Big\{E_1 \longrightarrow d_1 \mid E_1 \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C),\ d_1 \in \mathcal{E}_C[\![\lambda x_2, \ldots, x_n.\, hu_1 \cdots u_m]\!]\rho[x_1 \mapsto E_1]\Big\} \\
&= \Big\{E_1 \longrightarrow (E_2 \longrightarrow d_2) \mid E_1, E_2 \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C),\ d_2 \in \mathcal{E}_C[\![\lambda x_3, \ldots, x_n.\, hu_1 \cdots u_m]\!]\rho[x_1 \mapsto E_1, x_2 \mapsto E_2]\Big\} \\
&\vdots \\
&= \Big\{E_1 \longrightarrow (E_2 \longrightarrow \cdots (E_n \longrightarrow d_n) \cdots) \mid E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C),\ d_n \in \underbrace{\mathcal{E}_C[\![hu_1 \cdots u_m]\!]\rho[x_1 \mapsto E_1, \ldots, x_n \mapsto E_n]}_{= \{d'_m \in D \mid \exists E'_m \in \mathbb{P}_{fin}(D);\ E'_m \subseteq \mathcal{E}_C[\![u_m]\!]\rho[x_1 \mapsto E_1, \ldots, x_n \mapsto E_n] \text{ et } (E'_m \longrightarrow d'_m) \in \mathcal{E}_C[\![hu_1 \cdots u_m]\!]\rho[x_1 \mapsto E_1, \ldots, x_n \mapsto E_n]\}}\Big\} \\
&\vdots \\
&= \Big\{E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \longrightarrow d_n \mid E_1, \ldots, E_n \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C), \exists E'_m, \ldots, E'_1 \in \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{E}_C); \\
&\qquad \forall i \in [\![1, m]\!],\ E'_i \subseteq \mathcal{E}_C[\![u_i]\!]\rho[x_i \mapsto E_i]_{1 \le i \le n} \\
&\qquad \text{et } E'_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E'_m \longrightarrow d_n \in \underbrace{\mathcal{E}_C[\![h]\!]\rho[x_i \mapsto E_i]_{1 \le i \le n}}_{= \rho[x_i \mapsto E_i]_{1 \le i \le n}(h)}\Big\}
\end{aligned}$$

On veut construire un ρ pour lequel $\mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho$ contient un élément strict.
Or, l'hypothèse d'induction appliquée aux u_i nous fournit, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, un environnement ρ_i tel que $\mathcal{E}_C[\![u_i]\!]\rho_i$ contient un élément strict d_i.
Soit $c \in C \neq \emptyset$.
En notant ρ l'environnement défini par :

$$\begin{cases} \forall x \in Var \backslash \{h\},\ \rho(x) & \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{1 \le i \le m} \rho_i(x) \\ \rho(h) & = \bigcup\limits_{1 \le i \le m} \rho_i(h) \ \cup\ \underbrace{\{\{d_1\} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \{d_m\} \longrightarrow c\}}_{\text{strict}} \end{cases}$$

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\rho_i \le \rho$, donc par monotonie de $D[\![u']\!](\rho'[x := \bullet])$ (pour tout u' et ρ') :

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ d_i \in \mathcal{E}_C[\![u_i]\!]\rho$$

d'où

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \{d'_i\} \subseteq \mathcal{E}_C[\![u_i]\!]\rho$$

Par conséquent :

$$\rho(x_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \rho(x_n) \longrightarrow c \in \mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho$$

(avec $E'_i = \{d'_i\}$ dans la définition ensembliste précédente)
Or, par hypothèse d'induction, pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$, $\rho_i(x_j)$ est fini et strict, donc par définition de ρ, les $\rho(x_j)$ sont finis et stricts, d'où :

$$\rho(x_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \rho(x_n) \longrightarrow c \in \mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho \text{ est strict}$$

Le résultat est acquis.

Enfin, si t est un terme clos, on lui applique le lemme précédent : il existe un environnement ρ tel que $\mathcal{E}_C [\![t]\!] \rho = \mathcal{E}_C [\![t]\!]$ contient un élément strict, ce qui conclut.

$2. \Longrightarrow 3.$

NB :

- la saturation est dès à présent entendue pour la réduction gauche.
- on notera $\longrightarrow_g$ la réduction gauche (et $\longrightarrow_g^*$ sa clôture réflexive transitive).
- notons que la réduction de tête est un cas particulier de réduction gauche.

Comme S'_0 est trivialement saturé et contient les variables, on a les mêmes résultats concernant l'ensemble des K'-candidats qu'en **IV)** (les démonstrations sont les quasiment les mêmes pour les résultats analogues aux questions **11)** et **13)** : les éléments nouveaux/modifiés y sont mis en gras) :

---

*Résultat analogue à **IV. 11)** pour les K'-candidats* :

> Si S' est saturé, $S \Longrightarrow S'$ le reste pour tout ensemble S.

Soit S' un ensemble saturé.

Montrons que, pour tout ensemble S, $S \Longrightarrow S'$ est saturé.

Soit S un ensemble, **soient $u \in S \Longrightarrow S'$ et u' tel que $u' \longrightarrow_g u$.**

Montrons que $u' \in S \Longrightarrow S'$, *i.e* que pour tout $v \in S$, $u'v \in S'$.

Soit $v \in S$.

Comme $u \in S \Longrightarrow S'$:

$$uv \in S'$$

et comme S' est saturé :

$$u'v \in S'$$

---

*Résultat analogue à **IV. 12)** pour les K'-candidats* :

> *Si* t est un λ-terme dont la réduction gauche ne termine pas, et x une variable, *alors* la réduction gauche de tx ne termine pas non plus.

Soient t un λ-terme dont la réduction gauche ne termine pas, et x une variable.

Par l'absurde : supposons que la réduction gauche de tx termine.

Comme la réduction de tête est un cas particulier de réduction gauche, la réduction de tête de t ne termine pas non plus.

Donc, par **IV.12)**, la réduction de tête de tx ne termine pas.

Or, comme la réduction gauche de tx termine, tx a une forme normale de tête.

- *car sinon* : en notant t_n le dernier terme produit par la réduction gauche de tx, la forme normale de t_n a un rédex de tête (puisqu'elle n'est pas normale de tête), lequel peut être contracté par réduction gauche (ce qui contredit la définition de t_n).

Cela contredit le fait que la réduction de tête de tx ne termine pas, d'après les équivalences montrées à la fin de la partie **IV)** $\big((b) \Longrightarrow a)\big)$.

---

*Résultat analogue à **IV. 13)** pour les K'-candidats* :

> Si S **et S' sont des K'-candidats**, $S \Longrightarrow S'$ reste un K'-candidat.

Soient S et S' des K'-candidats. Montrons que $S \Longrightarrow S'$ est un K'-candidat.

1. $S \Longrightarrow S'$ est saturé

En effet : on applique *l'analogue de la question 11*, puisque S' est saturé (car S' est un K'-candidat).

2. $S'_0 \subseteq S \Longrightarrow S'$

Si $xu_1 \cdots u_n \in S'_0$, montrons que $xu_1 \cdots u_n \in S \Longrightarrow S'$.

Soit $v \in S$.

Comme $S \subseteq S_l$ (car S est un K'-candidat), v est normalisable par la gauche.

En outre, $xu_1 \cdots u_n \in S'_0$ implique que tous les u_i le sont aussi, donc $xu_1 \cdots u_n v \in S_0$.

Montrons que $xu_1 \cdots u_n v \in S'$.

C'est le cas puisque $S_0 \subseteq S'$ (car S' est un K'-candidat) et :

$$xu_1 \cdots u_n v \in S_0 \subseteq S'$$

3. $S \Longrightarrow S' \subseteq S_l$

Si $u \in S \Longrightarrow S'$, montrons que $u \in S_l$.

Comme $u \in S \Longrightarrow S'$ et $S' \subseteq S_l$ (car S' est un K'-candidat) :

$$\forall v \in S, uv \in S' \subseteq S_l$$

Par conséquent, pour toute variable $x \in S$: ux a une réduction gauche finie, ce qui implique, par contraposée de *l'analogue de la question 12*, que u aussi, c'est-à-dire que $u \in S_l$.

Or, il existe une variable $x \in S$ **puisque** $\underbrace{S \supseteq S'_0}_{\text{car } S \text{ est un } K'\text{-candidat}} \supseteq Var$: donc

$$u \in S_l$$

Les K'-candidats sont donc clos par $\Longrightarrow$ et par intersection (trivialement, puisque les conditions à vérifier sont quantifiées universellement).

Ces résultats de stabilité nous permettent dès lors de définir $I'(d)$ de la même manière que dans la partie **IV.**, et les résultats analogues à ceux des questions **IV.14)** et **IV.15)** s'ensuivent (en remplaçant "$\mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho \neq \emptyset$" par "$\mathcal{E}_C[\![t]\!]\rho$ contient un élément strict" dans **IV.15)**).

$3. \Longrightarrow 1.$

C'est immédiat.