2015 - 2016

Oraux

Exercice - 1 : Centrale M_1 2015-2016

On dispose de $(U, V, X_0, \lambda) \in (\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^3 \times \mathbb{R}$.
On considère alors $A \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda I_n + U {}^tV$ et le système différentiel

$$\begin{cases} Y' &= AY \\ Y(0) &= X_0 \end{cases} \qquad (S_{U,V,X_0,\lambda})$$

1) Résoudre tous les problèmes de CAUCHY correspondants.
2) Quels sont les sous-espaces de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension minimale qui contiennent l'orbite Ω_{X_0} passant par X_0 ?
3) Donner une CNS sur (U, V, λ) pour que l'orbite Ω_{X_0} soit bornée.
4) Donner une CNS sur (U, V, λ) pour que l'orbite Ω_{X_0} soit bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Solution.

1) Soit $X \in (\mathfrak{M}_{n,1})^{\mathbb{R}}$ vérifiant $(S_{U,V,X_0,\lambda})$, soit $t \in \mathbb{R}$.
On pose $B \stackrel{\text{déf}}{=} U {}^tV$.

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{tA}\, X_0 \\ &= e^{t\lambda I_n}\, e^{tU{}^tV}\, X_0 \qquad\qquad (\text{car } [\lambda I_n, U{}^tV] = 0\ ) \\ &= e^{t\lambda}\, e^{tB}\, X_0 \end{aligned}$$

Or, en posant $\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} {}^tVU = \mathrm{Tr}(U{}^tV) = \langle V, U\rangle$ pour le produit scalaire euclidien canonique :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = (U{}^tV)^k = \alpha^{k-1}U{}^tV = \alpha^{k-1}B$$

d'où

$$e^{tU{}^tV} = I_n + \sum_{k\geqslant 1} \frac{t^k\alpha^{k-1}}{k!}B = \begin{cases} I_n + \dfrac{e^{t\alpha} - 1}{\alpha}B & \text{si } \alpha \neq 0, \\ I_n + tB & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{cases} e^{\lambda t}\, X_0 + e^{\lambda t}\, \dfrac{e^{t\alpha} - 1}{\alpha}\, B\, X_0 & \text{si } \alpha \neq 0, \\ e^{\lambda t}\, X_0 + e^{\lambda t}\, tB\, X_0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \circledast$$

2) Soit F un sous-espace de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_0 \in F$.

— Remarquons déjà que : $F \supset \Omega_{X_0} \iff \begin{cases} X_0 \in F \\ BX_0 \in F \end{cases}$

En effet : La condition est évidemment suffisante, et elle est nécessaire, puisque (avec $t=1$ dans $\circledast$) :

$$\begin{cases} \underbrace{e^{\lambda}\,X_0}_{\in F} + \underbrace{e^{\lambda}\,\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}}_{\neq 0_{\mathbb{R}}}\,B\,X_0 \in F & \text{si } \alpha \neq 0, \\ \\ e^{\lambda}\,X_0 + e^{\lambda}\,B\,X_0 \in F & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'où $BX_0 \in F$.

— Minorons la dimension de $F \supset \Omega_{X_0}$:

- **Cas 1 :** $B=0$, i.e $U=0$ ou $V=0$ $\quad \left(\text{car } B = ([U]_i[V]_j)_{i,j\in[\![1,n]\!]}\right)$

  Alors le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace contenant Ω_{X_0} est $\mathbb{R}X_0$, et

  $$F \supset \mathbb{R}X_0\,,\text{ et } \dim F \geqslant 1$$

- **Cas 2 :** $B \neq 0$, i.e $U \neq 0$ et $V \neq 0$
  Remarquons que :

  $$BX_0 = U({}^tVX_0) = \langle V, X_0\rangle\, U$$

  Donc :

  — **Sous-Cas 1 :** $X_0 \in \operatorname{Ker} B \overset{U\neq 0}{=} (V)^{\perp}$
  OU

  — **Sous-Cas 2 :** $X_0 \in \mathbb{R}U$

  Dans les deux cas, il vient, de même, que :

  $$F \supset \mathbb{R}X_0\,,\text{ et } \dim F \geqslant 1$$

  — **Sous-Cas 3 :** $X_0 \notin \operatorname{Ker} B \cup \mathbb{R}U$

  Alors $\operatorname{Vect}(X_0, BX_0)$ est un plan, d'où :

  $$F \supset \operatorname{Vect}(X_0, BX_0)\,,\text{ et } \dim F \geqslant 2$$

En conclusion :

$$F \supset \Omega_{X_0} \iff \begin{cases} F \supset \mathbb{R}X_0 & \text{si } X_0 \in \operatorname{Ker} B \cup \mathbb{R}U, \\ \\ F \supset \underbrace{\operatorname{Vect}(X_0, BX_0)}_{\text{c'est un plan}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Si $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}\backslash\{0\}$, on cherche une condition nécessaire et suffisante sur (U, V, λ) pour que l'orbite $\Omega_{X_0} = \{e^{t\lambda}\,e^{tB}\,X_0\}_{t\in\mathbb{R}}$ soit bornée.

— On se débarrasse des cas triviaux :

- **Si** $n=1$ **:** la CNS est $\lambda = -B = -UV$
- **Si** $B=0$ **:** comme $\Omega_{X_0} = \left\{e^{\lambda t}\,X_0\right\}_{t\in\mathbb{R}}$, il faut et il suffit que $\lambda = 0$

— Supposons que $n \geqslant 2$ et $B \neq 0$:

- **Cas 1 :** $\alpha = \mathrm{Tr}(\mathrm{U}^t\mathrm{V}) \neq 0$:

  B est diagonalisable, car annulée par le polynôme scindé à racines simples $\mathrm{X}(\mathrm{X}-\alpha)$, et :

  il existe $\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2 & \cdots & \mathrm{C}_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathrm{L}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{L}_n \end{array} \right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} &= \mathrm{P} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{t\alpha} \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{t\alpha}\,\mathrm{C}_n \end{array} \right) \mathrm{P}^{-1} \\
&= \left(\begin{array}{c} \mathrm{e}^{t\alpha}[\mathrm{C}_n]_1\mathrm{L}_n \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{e}^{t\alpha}[\mathrm{C}_n]_n\mathrm{L}_n \end{array} \right) \qquad \text{(non borné car } \mathrm{C}_n \neq 0 \text{ et } \mathrm{L}_n \neq 0\text{)}
\end{aligned}
$$

  Donc Ω_{X_0} n'est pas bornée.

- **Cas 2 :** $\alpha = \mathrm{Tr}(\mathrm{U}^t\mathrm{V}) = 0$:

  B n'est pas diagonalisable, car $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) = \{0\}$, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{X}_0 + \mathrm{e}^{\lambda t}\,t\mathrm{B}\,\mathrm{X}_0 \in \Omega_{\mathrm{X}_0}$$

  donc Ω_{X_0} n'est pas bornée.

Finalement, si $\mathrm{X}_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}\backslash\{0\}$:

$$\Omega_{\mathrm{X}_0} \text{ est bornée } \iff \Big(n = 1 \text{ et } \lambda = -\mathrm{UV}\Big) \,\mathrm{OU}\, \Big(\mathrm{B} = 0 \text{ et } \lambda = 0\Big)$$

4) Si $\mathrm{X}_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}\backslash\{0\}$, on veut que $\Omega'_{\mathrm{X}_0} \overset{\text{déf}}{=} \{\mathrm{e}^{t\lambda}\,\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}\,\mathrm{X}_0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ soit bornée. On reprend les mêmes cas que précédemment :

—
- **Si** $n = 1$ **:** la CNS est $\lambda \leqslant -\mathrm{B} = -\mathrm{UV}$
- **Si** $\mathrm{B} = 0$ **:** il faut et il suffit que $\lambda \leqslant 0$

— Supposons que $n \geqslant 2$ et $\mathrm{B} \neq 0$:
- **Cas 1 :** $\alpha = \mathrm{Tr}(\mathrm{U}^t\mathrm{V}) \neq 0$:

Il existe $\mathrm{P} = \left(\mathrm{C}_1 \mid \mathrm{C}_2 \mid \cdots \mid \mathrm{C}_n \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{L}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathrm{e}^{t\lambda}\,\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t(\lambda+\alpha)}[\mathrm{C}_n]_1 \mathrm{L}_n \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{e}^{t(\lambda+\alpha)}[\mathrm{C}_n]_n \mathrm{L}_n \end{pmatrix}$$

Donc Ω_{X_0} est bornée si, et seulement si, $\lambda + \alpha \leqslant 0$

- **Cas 2 :** $\alpha = \mathrm{Tr}(\mathrm{U}^t\mathrm{V}) = 0$:

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{X}_0 + \mathrm{e}^{\lambda t}\,t\mathrm{B}\,\mathrm{X}_0 \in \Omega_{\mathrm{X}_0}$$

et Ω_{X_0} est bornée si, et seulement si, $\lambda \leqslant 0$ et $\Big(\mathrm{X}_0 \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{B}$ ou $\lambda \neq 0\Big)$

Finalement, si $\mathrm{X}_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}\backslash\{0\}$:

$$\Omega'_{\mathrm{X}_0} \text{ est bornée} \iff \begin{cases} \quad n = 1 \text{ et } \lambda \leqslant -\mathrm{UV} \\ \text{OU} \quad \mathrm{B} = 0 \text{ et } \lambda \leqslant 0 \\ \text{OU} \quad \lambda \leqslant -\mathrm{Tr}(\mathrm{U}^t\mathrm{V}) \text{ et } \Big(\mathrm{Tr}(\mathrm{U}^t\mathrm{V}) \neq 0 \text{ ou } \mathrm{X}_0 \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{B} \text{ ou } \lambda \neq 0\Big) \end{cases}$$

$\square$