Exercice - 1 : **Petit Lemme**

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$:
f est uniformément continue et f admet une intégrale sur $\mathbb{R}_+ \Rightarrow f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Solution.
Soit $x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, et $\eta > 0$ un $\mathrm{mcu}(f, \epsilon)$. On suppose que $\mathrm{F} \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{\bullet} f$ a une limite finie en $+\infty$.
Pour tout $t \in [x, x+\eta]$:

$$-\epsilon \leqslant f(x) - f(t) \leqslant \epsilon$$

d'où, en intégrant sur $[x, x+\eta]$ et en divisant par η :

$$-\epsilon \leqslant f(x) - \frac{1}{\eta} \underbrace{\int_x^{x+\eta} f}_{=\mathrm{F}(x+\eta)-\mathrm{F}(x)} \leqslant \epsilon$$

Or : $\mathrm{F}(x+\eta) - \mathrm{F}(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *(par abus de notation, en "libérant" x)*. Donc $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$