Exercice - 20 - **forum UPS** juin 2013

Donner un équivalent, lorsque $n \to \infty$, du nombre des surjections $\sigma(n,p)$ d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.

Solution. `M.Guelfi :`
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et A (resp. B) un ensemble à n (resp. p) éléments, notés, sans perte de généralité, $1, \cdots, n$ (resp. $1, \cdots p$).
On note S_{np} (resp. N_{np}) le nombre de fonctions surjectives (resp. non surjectives) de A dans B.
Comme, pour chaque fonction $f \in \mathrm{B}^{\mathrm{A}}$ non surjective, on peut choisir au moins un élément non atteint par f parmi les p éléments de B, l'injectivité des fonctions, pour tout $q \in [\![1, p]\!]$:

$$\mathrm{id}_q \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{id}|_{\{f \in \mathrm{B}^{\mathrm{A}} \mid f \text{ non surjective n'atteignant pas } q\}} \in \left(\mathrm{B}\backslash\{q\}\right)^{\mathrm{A}}$$

assure que :

$$\forall q \in [\![1, p]\!], \left|\{f \in \mathrm{B}^{\mathrm{A}} \mid f \text{ non surjective n'atteignant pas } q\}\right| \leqslant |\mathrm{B}\backslash\{q\}|^{|\mathrm{A}|} = (p-1)^n$$

En sommant, pour q allant de 1 à p il vient :

$$\mathrm{N}_{np} \leqslant \sum_{q=1}^{p} \left|\{f \in \mathrm{B}^{\mathrm{A}} \mid f \text{ non surjective n'atteignant pas } q\}\right| \leqslant p(p-1)^n$$

Donc[1] : $\mathrm{N}_{np} \underset{n \to +\infty}{=} o(p^n)$, et

$$\mathrm{S}_{np} = p^n - \mathrm{N}_{np} \underset{n \to +\infty}{=} p^n + o(p^n) \underset{n \to \infty}{\sim} p^n$$

□

1. Car $\frac{\mathrm{N}_{np}}{p^n} = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$