Exercice - 13 : X M2 2014 Miss Tair

Les matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}+\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont toutes trois de rang 1.
Montrer que $\mathrm{ImA} = \mathrm{ImB}$ ou $\mathrm{KerA} = \mathrm{KerB}$

Solution. On note leurs applications linéaires respectives dans une base fixée a, b et $a+b$.

— **Si** $\mathrm{KerA} \neq \mathrm{KerB}$ **:**
Alors il existe deux[1] vecteurs $x_\mathrm{A} \in (\mathrm{KerA})\backslash\mathrm{KerB}$ et $x_\mathrm{B} \in (\mathrm{KerB})\backslash\mathrm{KerA}$, tels que $\begin{cases} \mathrm{ImA} & = \mathbb{K}a(x_\mathrm{B}) \\ \mathrm{ImB} & = \mathbb{K}b(x_\mathrm{A}) \end{cases}$
Or : $(a+b)(x_\mathrm{A}) = b(x_\mathrm{A})$, et $(a+b)(x_\mathrm{B}) = a(x_\mathrm{B})$, donc $b(x_\mathrm{A})$ et $a(x_\mathrm{B})$ sont liés puisqu'ils sont tous deux sur la droite $\mathrm{Im}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$.
Il en résulte que $\mathrm{ImA} = \mathbb{K}a(x_\mathrm{B}) = \mathbb{K}b(x_\mathrm{A}) = \mathrm{ImB}$.

— On a montré que $(\mathrm{KerA} \neq \mathrm{KerB}) \Rightarrow (\mathrm{ImA} = \mathrm{ImB})$, i.e que : $\mathrm{ImA} = \mathrm{ImB}$ ou $\mathrm{KerA} = \mathrm{KerB}$.

□

Exercice - 14 : X 1999, Centrale 2001, X 2015 Romulus Bak

On considère ici une $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{C}, \mathbb{R})$.
Montrer le théorème de Borsuk-Ulam qui affirme l'existence d'un $x \in \mathbb{U}$ tel que

$$f(x) = f(-x)$$

Solution. On veut montrer que $\mathbb{U} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - f(-x)$ s'annule sur $\mathbb{U}$.
Pour ce faire, on paramètre $\mathbb{U}$ pour se ramener à une fonction de la variable réelle :

$$\psi \overset{\text{déf}}{:} [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \theta \mapsto f(\mathrm{e}^{i\theta}) - f(\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)})$$

Comme

$$\begin{cases} \psi(0) & = f(1) - f(-1) \\ \psi(\pi) & = f(-1) - f(1) \end{cases}$$

$\psi(0)\psi(\pi) \leqslant 0$ et, par continuité[2] de ψ sur $[0, \pi]$, le TVI appliqué à ψ entre 0 et π conclut.

□

1. $\mathrm{KerA} \neq \mathrm{KerB}$ en assure l'existence d'au moins un. S'il n'y en avait qu'un, disons x_A, on aurait $\mathrm{KerB} \subset \mathrm{KerA}$, et l'égalité des dimensions (par le théorème du rang) des deux espaces impliquerait $\mathrm{KerA} = \mathrm{KerB}$
2. comme composée de fonctions continues