Exercice - 8 : Centrale M1 2016 **Pauline Aumyal**

Si

- $\mathbb{K}$ est infini
- b injective
- $M \stackrel{\text{déf}}{=} (a_i + b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie la propriété : les termes de chaque colonne ont même produit

montrer qu'il en va de même pour chaque ligne.

Solution. **Méthode 1 :**

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note σ_k^a (resp. σ_k^b) la k-ième fonction symétrique élémentaire des $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (resp. $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$) (avec la convention : $\sigma_0^a = \sigma_0^b = 1$)

On sait que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\prod\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_j)$ vaut une constante c, d'où :

$P \stackrel{\text{déf}}{=} \prod\limits_{k=1}^{n} (X + a_k) - c$ a n racines distinctes (par injectivité de b) : les $\{b_j\}_{j \in [\![1,n]\!]}$

Donc $P = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^a X^{n-k} - c = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k^b X^{n-k} \quad \circledast$

Montrons que $Q \stackrel{\text{déf}}{=} \prod\limits_{k=1}^{n} (X + b_k) + (-1)^n c$ a pour racines les $\{a_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$:

Par $\circledast$:

$$\begin{cases} (-1)^n \sigma_n^b & = \sigma_n^a - c \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], (-1)^k \sigma_k^b & = \sigma_k^a \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} (-1)^n \sigma_n^a & = \sigma_n^b + (-1)^n c \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], (-1)^k \sigma_k^a & = \sigma_k^b \end{cases}$$

Et, par suite :

$$Q \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^b X^{n-k} + (-1)^n c = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k^a X^{n-k} = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$$

Donc : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\prod\limits_{k=1}^{n} (a_i + b_k) + (-1)^n c = Q(a_i) = 0$, soit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \prod_{k=1}^{n} (a_i + b_k) = (-1)^{n+1} c = \text{cste}$$

Le résultat est acquis.

Méthode 2 (M.Guelfi) :

En posant

$$P \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{i=1}^{n} (X + a_i) - \prod_{i=1}^{n} (X - b_i)$$

et en notant $\tilde{P}$ sa fonction polynomiale associée : il existe une constante c telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \tilde{P}(b_k) = c \quad \circledast$$

$\tilde{P} - c$ s'annule en chacun des $(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$. Donc le polynôme $P - c$ a pour racines les $(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$, qui sont au nombre de n (ils sont deux-à-deux distincts).

Comme $\mathrm{P} - c$ a n racines distinctes et est de degré inférieur à $n-1$ (le coefficient du monôme d'ordre n est nul) : $\mathrm{P} - c$ est le polynôme nul, et :

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - b_i) = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} + a_i) - c$$

Soit :

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - \mathrm{X}) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} + a_i) + (-1)^{n+1} c$$

Et en évaluant cette expression en $-a_l$, pour tout $l \in [\![1, n]\!]$:

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i + a_l) = (-1)^{n+1} c = \text{cste}$$

ce qui conclut.

Sur la cardinalité de $\mathbb{K}$

A partir du moment où $b \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est injective, l'hypothèse "$\mathbb{K}$ est infini" n'est pas nécessaire, puisque, par $\circledast$, le polynôme $\mathrm{P} - c$ a strictement plus de racines que son degré : c'est nécessairement le polynôme nul [a].

a. dire "la fonction polynomiale associée est nulle donc le polynôme est nul" serait faux dans un corps fini, par contre.

Interpolation de Lagrange

On peut aussi utiliser le théorème d'interpolation de LAGRANGE : Comme P est de degré inférieur à $n-1$ (le coefficient du monôme d'ordre n est nul), P est, d'après $\circledast$ (les $(b_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distincts, et on confond $\tilde{\mathrm{P}}$ et P, car $\mathbb{K}$ est infini) **le** polynôme d'interpolation de Lagrange : $c \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{\mathrm{X} - b_i}{b_k - b_i}$

Donc :

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - b_i) = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} + a_i) - c \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{\mathrm{X} - b_i}{b_k - b_i}$$

Soit :

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - \mathrm{X}) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} + a_i) + (-1)^{n+1} c \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{\mathrm{X} - b_i}{b_k - b_i}$$

Et en évaluant cette expression en $-a_l$, pour tout $l \in [\![1, n]\!]$:

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i + a_l) = (-1)^{n+1} c \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{b_i + a_l}{b_i - b_k} = \text{cste}$$

ce qui conclut.

C'est l'occasion, opportune, de se rendre compte que [a] : $\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{\mathrm{X} - b_i}{b_k - b_i}$ vaut peut-être 1

a. cf. exercice 4, note infrapaginale 5

$\square$