Exercice - 5 : Mines 2015 **Lance Laudulak**

1 Existe-t-il une sous-suite géométrique de $u = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la somme vaille $\frac{1}{5}$?

2 Existe-t-il une sous-suite géométrique de $u = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la somme vaille $\frac{1}{7}$?

Solution. Soit $v \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{2^{na}}\right)_{n\geqslant b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ une sous-suite géométrique de u, et l un entier impair différent de 1.
Pour que sa somme vaille $\frac{1}{l}$, il faut et il suffit que : $\frac{1}{2^{ab}}\frac{1}{1-1/2^a} = \frac{1}{l}$, soit : $2^{a(1-b)}l = 2^a - 1$, et

$$l = 2^{ab} - 2^{a(b-1)}$$

Comme l est impair et différent de 1, il faut nécessairement que $ab = 0$ ou $a(b-1) = 0$; et puisque que $a = 0$ et $b = 0$ conduisent à des absurdités, nécessairement : $b = 1$.
Donc

$$l = 2^a - 1$$

1 **Pour** $l = 5$: aucune sous-suite géométrique de u ne convient.

2 **Pour** $l = 7$: avec $a = 3$ et $b = 1$, $v \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{2^{3n}}\right)_{n\geqslant 1}$ convient.

□

Exercice - 7 : Centrale M2 2010 **Kahn Didah**

Si $f, g \in C^0([0,1],[0,1])$ commutent, montrer que :

$$\exists \omega \in [0,1]; f(\omega) = g(\omega)$$

Solution. Par l'absurde, supposons que : $f - g$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.
Donc, par continuité, $f - g$ est de signe strict constant et : $f - g \overset{\text{sans perte de généralité}}{>} 0$

— *Méthode 1 :* Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,1], f(x) > g(x) + \alpha \quad \circledast$$

En particulier, comme f est à valeurs dans $[0,1]$:

$$f(f(x)) > g(f(x)) + \alpha \overset{\text{commutativité}}{=} f(g(x)) + \alpha \overset{\circledast}{>} g(g(x)) + 2\alpha$$

Par une récurrence immédiate, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], f^n(x) > g^n(x) + n\alpha$$

Donc[1]

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n - g^n > n\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad (\text{car } \alpha > 0)$$

ce qu'interdit "f et g sont à valeurs dans $[0,1]$".

1. Petite erreur de logique habituelle

— *Méthode 2 :* On pose
$$\mathrm{A} \overset{\text{déf}}{=} \{x \in [0,1] \mid f(x) = x\}$$
Par l'absurde : on suppose toujours que $f - g \overset{\text{sans perte de généralité}}{>} 0$
Comme A est non vide [2] et minoré (par 0), A admet une borne inférieure notée ω.

- — Montrons que $\omega \in \mathrm{A}$:
  Par définition de ω, il existe une suite u d'éléments de A tendant vers ω.
  Par continuité de f :
  $$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \overset{u_n \text{ est point fixe}}{=} \lim_{n\to\infty} u_n = \omega$$
  donc ω est point fixe de f.

  `[Pour les 5/2] Autre méthode pour montrer que ω est point fixe [M. Guelfi]:`
  $\mathrm{A} = \left(f - \mathrm{id}_{[0,1]}\right)^{-1}\{0\}$ est fermé par continuité de $f - \mathrm{id}_{[0,1]}$, donc $\omega \in \mathrm{A}$.

- — Montrons qu'il existe un élément de A strictement inférieur à ω, ce qui contredira la minimalité de ω :
  $$f(g(\omega)) \overset{\text{commutativité}}{=} g(f(\omega)) = g(\omega) < f(\omega) = \omega$$
  ce qui est impossible, puisque :
  - — $f(g(\omega)) = g(\omega)$ d'où $g(\omega) \in \mathrm{A}$
  - — $g(\omega) < \omega$, ce qui contredit la minimalité de ω

$\square$

2. Comme $f \in \mathrm{C}^0([0,1],[0,1])$, f admet un point fixe sur $[0,1]$, par application du TVI à la fonction continue $f - \mathrm{id}_{[0,1]}$ entre 0 et 1