Exercice - 40 - **Centrale** 2002

Quel est le sous-groupe de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qu'engendrent les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Solution. On note $(\mathrm{H}, +) \overset{\text{déf}}{=} (\langle \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rangle, +)$ le sous-groupe de $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), +)$ engendré par les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Montrons que $\mathrm{H} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:

— $\mathrm{H} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est clair.

— $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{H}$:
En effet : Si

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ni \mathrm{A} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & a_2 & & (*') & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (*) & & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

alors, sans perte de généralité [1], si $a_1, a_2, \cdots, a_r$ sont nuls et $a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_n$ sont non nuls :

$$\mathrm{H} = \langle \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rangle \ni \mathrm{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & (0) & \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & (*) & & \frac{a_{r+1}}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{a_n}{2} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & (*') & \\ \vdots & & -1 & & & \vdots \\ \vdots & (0) & & \frac{a_{r+1}}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a_n}{2} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

□

Exercice - 42 - **Centrale** 2008

1 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contient-il des droites affines ?

2 Et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Solution. $\mathbb{K} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Si

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \ni \mathrm{A} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. une rédaction plus rigoureuse (mais inutilement lourde) consisterait à noter $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ les coefficients diagonaux nuls

alors

$$\mathrm{D} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{I}_n + \langle \mathrm{A} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{\alpha \in \mathbb{K}}$$

est une droite affine incluse dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (et même dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$).

Condition nécessaire quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si $\mathrm{D} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{M}_0 + \langle \mathrm{M} \rangle$ est une droite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \mathrm{M} + \mathrm{M}_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha \mathrm{M} + \mathrm{M}_0| \neq 0$$

d'où le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) \overset{\text{déf}}{=} |\mathrm{XM} + \mathrm{M}_0|$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, ce qui n'est possible que [a] si $\deg(\mathrm{P}) = 0$.

a. à cause du théorème de d'Alembert

□