Exercice - 4 : **X M1** 2008 **Xingjian Xu** ; interrogateur : M. Rémy LANGEVIN

1 Si $\mathrm{P} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{k=1}^{n+1} (\mathrm{X} - x_k)$, étudier le polynôme $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\mathrm{X}-x_k)^n}{\mathrm{P}'(x_k)}$

2 Calculer $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$

Solution.

1 Posons $\mathrm{Q} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\mathrm{X}-x_k)^n}{\mathrm{P}'(x_k)}$. Remarquons que, pour que Q soit bien défini, les x_k sont racines simples [1] de P.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\mathrm{P}'(x_k)} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-x_k)^i \mathrm{X}^{n-i} && \text{(Binôme de Newton)}\\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-x_k)^i}{\mathrm{P}'(x_k)} \right)}_{\stackrel{\text{déf}}{=} \alpha_i} \mathrm{X}^{n-i}
\end{aligned}$$

1.1 Montrons que : $\forall i \in [\![0, n-1]\!], \alpha_i = 0$:
En effet : Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

— *Cas 1 : 0 n'est pas racine de* P

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-x_k)^i}{\mathrm{P}'(x_k)}\\
&= \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-x_k)^{i+1}/\mathrm{P}'(x_k)}{\mathrm{X} - x_k} \right]_{\mathrm{X}=0} && \text{(car [2] } \forall k \in [\![1, n+1]\!], x_k \neq 0)\\
&= \left[\frac{(-\mathrm{X})^{i+1}}{\mathrm{P}} \right]_{\mathrm{X}=0} && \text{(car la partie entière de la fraction rationnelle est nulle [3])}\\
&= 0
\end{aligned}$$

— *Cas 2 : 0 est racine de* P
Alors : $\mathrm{P} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{XR}$ où R est un polynôme de degré n vérifiant $\mathrm{R}(0) \neq 0$.
Sans perte de généralité : $x_1 = 0$.

— *Pour $i \neq 0$:*

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-x_k)^i}{\mathrm{P}'(x_k)}\\
&= -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-x_k)^{i-1}}{\mathrm{R}'(x_k)} && \text{(car } \mathrm{P}'(x_k) = x_k \mathrm{R}'(x_k) + \underbrace{\mathrm{R}(x_k)}_{=0})\\
&= -\left[\frac{(-\mathrm{X})^i}{\mathrm{R}} \right]_{\mathrm{X}=0} && \text{(de même que précédemment)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

— *Pour $i = 0$:*

1. puisque $\forall k \in [\![1, n+1]\!], \mathrm{P}'(x_k) \neq 0$

— **Méthode 1 :** [cuisse de Jupiter]
$\alpha_0 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{P'(x_k)}$ est le coefficient du monôme X^n du polynôme d'interpolation de LAGRANGE $\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j=1, j\neq k}^{n+1} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} = 1$, d'où : $\alpha_0 = 0$

— **Méthode 2 :**

$$\alpha_0 = \frac{1}{P'(0)} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{P'(x_k)} = \frac{(-1)^n}{\prod_{j=2}^{n+1} x_j} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{x_k \prod_{j=2, j\neq k}^{n+1} (x_k - x_j)}$$

D'où :

$$\alpha_0 \prod_{j=2}^{n+1} x_j = (-1)^n + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} x_j}{\prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} (x_k - x_j)} = (-1)^n + (-1)^{n-1} \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{\prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} -x_j}{\prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} (x_k - x_j)}}_{\text{est égal à}^{4}\ 1} = 0$$

Donc, comme[5] $\prod_{j=2}^{n+1} x_j \neq 0$: $\alpha_0 = 0$

1.2 *Pour $i = n$:*
Comme

$$(-X)^{i+1} = (-X)^{n+1} \overset{\text{D.E}}{=} (-1)^{n+1} P + \underbrace{\left((-X)^{n+1} - (-1)^{n+1} P\right)}_{\overset{\text{déf}}{=} S}$$

où $\deg(S) < \deg(P)$,

$$\begin{aligned} 0 = \left[\frac{(-X)^{n+1}}{P}\right]_{X=0} &= \left[(-1)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{S(x_k)/P'(x_k)}{X - x_k}\right]_{X=0} \\ &= (-1)^{n+1} + \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-x_k)^{n+1}/P'x_k)}{X - x_k}\right]_{X=0} \\ &= (-1)^{n+1} + \alpha_n \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha_n = (-1)^n$$

1.3 Donc $Q = \alpha_n$, et :

$$\boxed{Q = (-1)^n}$$

2. il est nécessaire de le préciser, car on multiplie et divise par x_k
3. puisque le degré $i + 1 \leqslant n$ du polynôme au numérateur est strictement inférieur au degré du polynôme au dénominateur $(n + 1)$
4. c'est l'évaluation en 0 du polynôme d'interpolation de LAGRANGE $\sum_{k=2}^{n+1} \prod_{j=2,j\neq k}^{n+1} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} = 1$
5. car $\forall k \in [\![2, n+1]\!], x_k \neq 0$

2 On suppose loisiblement que $a \leqslant b$, et on note I l'intégrale à calculer.
Avec le changement de variables C^1 de $[a,b]$ dans $[0,\pi/2]$, $x = a\cos^2 u + b\sin^2 u$, il vient :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x &= -2a\cos u \sin u \mathrm{d}u + 2b \sin u \cos u \mathrm{d}u = (b-a)\sin(2u)\mathrm{d}u \\ x &= a \longrightarrow u = 0 \\ x &= b \longrightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_0^{\pi/2} (b-a)\sin u \cos u \sin(2u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{(b-a)^2}{4}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(4u))\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \underbrace{\left[\frac{\sin(4u)}{4}\right]_0^{\pi/2}}_{=0}\right) \\ &= \frac{\pi(b-a)^2}{8} \end{aligned}$$

$\square$