Exercice - 59 - **Bac S (écrit)** 2003

Montrer que $7|a^2+b^2 \iff 7|a \wedge b$.

Solution.

Un tableau de congruence modulo 7 montre que la somme de deux carrés vaut $0 \pmod 7$ si, et seulement si :

$$a, b = 0 \pmod 7$$

i.e (en notant v_7 la valuation 7-adique) :

$$v_7(a), v_7(b) > 0$$

i.e

$$v_7(a \wedge b) = \min(v_7(a), v_7(b)) > 0$$

soit :

$$7|a \wedge b$$

et le résultat est acquis.

Tableau de congruence modulo 7						
x	0	2	3	4	5	6
x^2	0	4	2	2	4	1

$\square$

Exercice - 60 - **ENSI (M) et *alii*** 1990

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $f^3 = f$, montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$$

Solution.
Il suffit de montrer que $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$, puisque le *théorème du rang* assure que :

$$\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

C'est le cas, puisque si $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$, il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} x & = f(y) \\ f(x) & = 0 \end{cases}$$

Par suite :

$$0 = f(0) = f^2(x) = f^3(y) \overset{f^3=f}{=} f(y) = x \quad \circledast$$

d'où :

$$\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$$

A propos de $f^3 = f$

— Le "3" de $f^3 = f$ n'a rien à voir avec le "3" de la dimension de $\mathbb{R}^3$.
En fait, la conclusion est vraie[a] pour tout endomorphisme f tel que $f^n = f$, avec $n \geqslant 2$.

— Le fait que $n = 3$ ne soit pas "optimal" (en minimalité) vient du fait qu'on ait[b] artificiellement pris l'image par f de

$$0 = f(x) = f^2(y)$$

— Pour $n > 3$, il suffit de prendre l'image par f^{n-3} de l'égalité[c] $0 = f^3(y)$, pour conclure de la même manière.

a. en dimension finie, si on se contente de reprendre la démonstration précédente.
b. en ⊛
c. établie en ⊛

□