**Exercice** - 28 - X 2000 - 2007

On considère un ensemble fini $\mathrm{E}$ muni d'une loi associative notée multiplicativement.
Montrer que $\mathrm{E}$,possède un élément idempotent, autrement dit :

$$\exists x \in \mathrm{E};\, x^2 = x$$

*Solution.* $\mathrm{E}$ est loisiblement non vide [1], et il existe $x_0 \in \mathrm{E}$. On pose [2]

$$\Psi \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \mathbb{N}^* & \to \mathrm{E} \\ k & \mapsto x_0^k \end{cases}$$

La non injectivité [3] de $\Psi$ assure l'existence de deux entiers distincts strictement positifs $m$ et $n$ tels que $m < n$ et

$$x_0^m = x_0^n$$

On pose $k \overset{\text{déf}}{=} n - m \geqslant 1$. Il vient, pour tout entier $r \geqslant m$ :

$$\begin{cases} x_0^{r+k} & \overset{\text{associativité}}{=} x_0^{r-m} x_0^{m+k} = x_0^{r-m} x_0^n = x_0^{r-m} x_0^m = x_0^r \\ x_0^{r+2k} & \overset{\text{associativité}}{=} x_0^{r+k} x_0^k = x_0^r x_0^k = x_0^{r+k} = x_0^r \\ \forall l \in \mathbb{N}^*, x_0^{r+lk} & = x_0^r \quad \circledast \qquad \text{(par une récurrence immédiate)} \end{cases}$$

On applique $\circledast$ avec $r \overset{\text{déf}}{=} mk$ et $l \overset{\text{déf}}{=} m$, et :

$$x_0^{2mk} = x_0^{mk}$$

D'où, en posant $x \overset{\text{déf}}{=} x_0^{mk}$, le résultat est acquis. □

1. sinon la conclusion est fausse
2. $\mathrm{P}si$ est à valeurs dans $\mathrm{E}$ car $\mathrm{E}$ est stable par "multiplication"
3. si $\Psi$ était injective, $\mathrm{E}$ serait de cardinal infini