Exercice - 24 - X (partiel) juin 2010 Pierre Cagne

Calculer

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

Solution. C'est l'évaluation en -1 de $\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{X}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = (-1)^{n-1}\frac{\mathrm{X}^n-1}{\mathrm{X}-1}$, qui vaut donc

$$\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Exercice - 26 - CCP, puis Mines 2000 - 2007

Résoudre, dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, l'équation

$$\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution.

Par l'absurde : supposons qu'il existe une telle matrice M. Il vient : $\mathrm{M}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = 0$ donc M est nilpotente.
Or, l'indice de nilpotence de M est inférieur à [1] 3.
Donc

$$0 = \mathrm{M}^3 = (\mathrm{M}^3)\,\mathrm{M} = \mathrm{M}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est absurde. □

Exercice - 30 - Mines (partiel) 2010 Thibault Manneville *puis* **CCP 2015 Taha El Hajji**

Trouver les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ qui vérifient :

$$(\mathrm{X}+4)\,\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\,\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$$

Solution.

— ANALYSE :
Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ convient, alors en évaluant l'identité de l'énoncé - notée $\circledast$ - en 0, il vient :

$$\mathrm{P}(0) = 0$$

D'où, en évaluant $\circledast$ en $-1, -2, -3$:

$$\mathrm{P}(-3) = \mathrm{P}(-2) = \mathrm{P}(-1) = 0$$

1. puisque l'application linéaire canoniquement associée à M est un élément nilpotent de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ **Note du prof de maths : Younesse utilise évidemment le théorème que j'ai démontré aux 3/2 le 25 juin et dont vous possédez plusieurs démonstrations.**

Donc P est un multiple de $\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)$, et il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)\,\mathrm{Q}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} & (\mathrm{X}+4)\,\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\,\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \\ \Rightarrow\quad & (\mathrm{X}+4)(\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+1)\mathrm{X}\,\mathrm{Q} = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}+4)\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) \\ \Rightarrow\quad & \mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Q}-\mathrm{Q}(0)$ est nul[2], et Q est constant.

— SYNTHÈSE :
Réciproquement, s'il existe un réel α tel que $\mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} \alpha\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)$, P convient.

Donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \{\alpha\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}+3)\}_{\alpha\in\mathbb{R}}}$$

□

2. car il s'annule une infinité de fois