

Exercice - 39 - ENS Ulm 2000 - 2008

Quel est le nombre des racines réelles de $nX^n - X^{n-1} - \dots - X - 1$?

Solution. On pose $P \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

1 est clairement une racine r\u00e9elle de P.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow nx^n &= \frac{x^n - 1}{x - 1} \\ \Leftrightarrow nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 &= 0 \end{aligned}$$

En notant $f \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto nt^{n+1} - (n+1)t^n + 1$, f est d\u00e9rivable (car polynomiale) sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et $f' = \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto n(n+1)t^{n-1}(t-1)$.

L'\u00e9tude du signe de f' sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ montre que :

- Si n est impair : P a une seule racine r\u00e9elle (1).
- Si n est pair : P a deux racines r\u00e9elles (1 et une racine strictement n\u00e9gative).

□



