Exercice - 34 - **ULC / X / C / M *à la mode !* - American Mathematical Monthly** mai 2011

Sur une sphère euclidienne 3-dimensionnelle $\overset{\text{déf}}{:}$ S, on donne trois nuages de n points chacuns : $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$.
Montrer que :

$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{S}\,;\ \sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{A}_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{B}_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{C}_k\|_2^2$$

Solution. `M.Guelfi` :
Comme l'énoncé, on confondra point et vecteur allant de l'origine à ce point. On note $\langle .|.\rangle$ le produit scalaire canonique, O le centre de S, et, sans perte de généralité, on se place dans un repère orthogonal d'origine O.

— Analyse :
Si $\mathrm{P} \in \mathrm{S}$ convient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{A}_k\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{n} \langle \mathrm{P}-\mathrm{A}_k | \mathrm{P}-\mathrm{A}_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\langle \mathrm{P}|\mathrm{P}\rangle}_{=\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\|_2^2=1} + \underbrace{\langle \mathrm{A}_k|\mathrm{A}_k\rangle}_{=\|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\|_2^2=1} -2\langle \mathrm{P}|\mathrm{A}_k\rangle \right) \\
&= 2n - 2\sum_{k=1}^{n} \langle \mathrm{P}|\mathrm{A}_k\rangle \\
&= 2n - 2\left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k \right\rangle
\end{aligned}$$

Il en est de même pour $\sum\limits_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{B}_k\|_2^2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \|\mathrm{P}-\mathrm{C}_k\|_2^2$.
Comme ces trois sommes sont égales :

$$\left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k}_{\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{A}_{\text{tot}}} \right\rangle = \left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k}_{\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{B}_{\text{tot}}} \right\rangle = \left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_k}_{\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{C}_{\text{tot}}} \right\rangle$$

D'où :

$$\circledast \begin{cases} \left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\mathrm{A}_{\text{tot}} - \mathrm{B}_{\text{tot}}}_{=\overrightarrow{\mathrm{B}_{\text{tot}}\mathrm{A}_{\text{tot}}}} \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \mathrm{P} \,\middle|\, \underbrace{\mathrm{B}_{\text{tot}} - \mathrm{C}_{\text{tot}}}_{=\overrightarrow{\mathrm{C}_{\text{tot}}\mathrm{B}_{\text{tot}}}} \right\rangle &= 0 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\mathrm{B}_{\text{tot}}\mathrm{A}_{\text{tot}}}, \overrightarrow{\mathrm{C}_{\text{tot}}\mathrm{B}_{\text{tot}}}\right)$, d'où P est **le** point d'intersection de la sphère S et de la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par O.

Synthèse :
Réciproquement, ce point convient (partant de $\circledast$, on peut remonter les calculs et aboutir à la relation de l'énoncé).

$\square$